Definice 1. Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice (Ω, P), kde Ω je konečná množina nebo spočetná množina a $P : 2^\Omega \to [0, 1]$ je taková, že

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Prvkům množiny Ω říkáme *elementární jevy*, prvkům množiny Σ říkáme *jevy* a funkci P říkáme *pravděpodobnost*.

Definice 2. Klasický pravděpodobnostní prostor (Ω, P) je takový pravděpodobnostní prostor, kde Ω je konečná a platí

$$\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Definice 3 (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Pravděpodobnost jevu A za podmínky $B, P(B) > 0$ definujeme

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

Věta 1 (Věta o úplné pravděpodobnosti)**.** Mějme množiny $B_1, B_2, \ldots, B_n$ po dvou disjunktní, pro které platí $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ (jde o tzv. *disjunktní rozklad* Ω) a navíc $\forall i : P[B_i] > 0$. Potom pro $A \in \Sigma$ platí

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \cdots + P[A|B_n]P[B_n]$$

Věta 2 (Bayesova věta)**.** Nechť $A \in \Sigma$ a množiny $B_1, \ldots, B_n$ tvoří disjunktní rozklad Ω a $\forall i : P[B_i] > 0$. Potom platí

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_j P[A|B_j]P[B_j]}$$

Definice 4. Jevy A, B jsou nezávislé, pokud platí $P[A \cap B] = P[A]P[B]$. Pokud $P[B] > 0$ můžeme také psát $P[A|B] = P[A]$ dle definice podmíněné pravděpodobnosti.

Definice 5. Náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definice 6. Nechť $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru. Střední hodnotu X definujeme jako

$$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega).$$

Věta 3 (Linearita střední hodnoty)**.** Nechť jsou X, Y náhodné veličiny, $\alpha \in \mathbb{R}$, platí:

$$\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha\mathbb{E}[X],\ \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Definice 7. Indikátor jevu A je náhodná veličina $I_A : \Omega \to \{0, 1\}$, daná předpisem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A, \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A. \end{cases}$$

Platí $\mathbb{E}[I_A] = P[A]$.

Úloha 1. Předpokládejme, že neznámou nemocí je trpí 10% populace. Test odhalí nakaženou osobu s pravděpodobností 97% a naopak u zdravého ji vyloučí s pravděpodobností 90%. Když otestujeme náhodnou osobu, jaká je pravděpodobnost, že výsledek bude správný, pokud

a) výsledek vyšel pozitivní,

b) výsledek vyšel negativní.

Úloha 2. Sázková společnost vyrobila 10 000 stíracích losů. Právě jeden z nich vyhrává 100 000 korun, pět vyhrává 50 000 korun a dalších 100 vyhrává 1 000 korun. Pokud jeden los stojí 100 korun, vyplatí se vám los koupit? Jaká je střední hodnota zisku, pokud si koupíme jeden los?

Úloha 3. Spočítejte očekávaný počet orlů, které padnou při hodu čtyřmi mincemi,

a) z definice,

b) pomocí indikátorů.

Úloha 4. Spočítejte střední počet pevných bodů náhodné permutace.

Úloha 5. Mějme náhodnou posloupnost z $0, 1^n$. Sérií nazveme maximální souvislý úsek stejných hodnot – tedy například posloupnost $1, 0, 0, 0, 1, 1, 0$ obsahuje 4 série. Jaká je střední hodnota počtu sérií?