

Úloha 1. Mějme dva souvislé grafy G_1, G_2 , které mají barevnosti $\chi(G_1), \chi(G_2)$. Jakou bude mít barevnost graf H , který vznikne slepením G_1 a G_2 za libovolný vrchol? [4 body]

Definice 1. Necht' π je permutace na množině $[n]$. Rozkladem π na cykly rozumíme graf orientovaný graf G_π , jehož množina vrcholů je $[n]$ a hrana vede z i do j , právě když $\pi(i) = j$. Snadno nahlédneme, že G_π je skutečně sjednocení cyklů (to zahrnuje smyčky i dvojcykly).

Úloha 2. Vybereme náhodnou permutaci π na množině $[n]$, graf G_π je její rozklad na cykly.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že na vrcholu 1 je smyčka? [2 body]
- b) Jaká je pravděpodobnost, že vrcholy 1, 2, 3 tvoří cyklus? [2 body]
- c) Rozhodněte, zda jsou jevy $\pi(1) = 1$ a $\pi(2) = 2$ nezávislé. [3 body]
- d) Jaká je pravděpodobnost, že π má právě jeden cyklus (tj. G_π je souvislý graf)? [4 body]
- e) Jaká je pravděpodobnost, že π má právě dva cykly (tj. G_π má právě dvě komponenty)? [5 bodů]
- f) Jaká je pravděpodobnost, že vrcholy 1 a 2 leží ve stejném cyklu? [5 bodů]