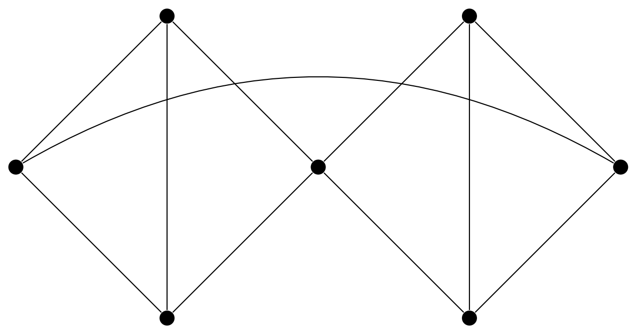
Úloha 1. Určete barevnost grafu na obrázku.



Úloha 2. Mějme graf G s barevností k. Jakou barevnost má graf, který vznikne rozdělením každé hrany přidáním vrcholu (tj. 1-dělení grafu G)?

Úloha 3. Mějme graf G takový, že $\chi(G) = k$ a pro každý vlastní podgraf H grafu G platí $\chi(H) \leq k-1$. Potom G nelze rozdělit na více komponent odebráním nejvýše $k-2$ hran.

Definice 1. Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice (Ω, P), kde Ω je konečná množina nebo spočetná množina a $P : 2^\Omega \to [0,1]$ je taková, že

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Prvkům množiny Ω říkáme *elementární jevy*, prvkům množiny Σ říkáme *jevy* a funkci P říkáme *pravděpodobnost*.

Definice 2. Klasický pravděpodobnostní prostor (Ω, P) je takový pravděpodobnostní prostor, kde Ω je konečná a platí

$$\forall \omega \in \Omega \,:\, P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Definice 3 (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Pravděpodobnost jevu A za podmínky $B, P(B) > 0$ definujeme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definice 4. Jevy A, B jsou *nezávislé*, pokud platí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pokud $P(B) > 0$ můžeme také psát $P(A|B) = P(A)$ dle definice podmíněné pravděpodobnosti.

Úloha 4. Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

a) Kolik je v našem pravděpodobnostním prostoru elementárních jevů? Jak bychom je reprezentovali?

b) Jaká je pravděpodobnost, že nám padl součet 16?

c) Jaká je pravděpodobnost, že na kostkách máme:

   1) alespoň jednu šestku
   2) právě dvě šestky
   3) na všech to samé číslo
   4) na každých dvou různá čísla

d) Jsou jevy „Na první kostce padlo alespoň j“ a „Na první kostce padlo sudé číslo“ nezávislé pro j = 4? Co pro j = 5?

e) Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že nám padla alespoň jedna šestka jestliže součet hozených čísel je 8?

f) Předpokládejme, že házíme n kostkami. Jaká musí být hodnota parametru n, aby byl jev „Alespoň na 3 kostkách padne alespoň 4“ pravděpodobnost přesně $\frac{1}{2}$?

Úloha 5. Dokažte, že neexistuje pravděpodobnostní prostor na spočetné množině s uniformní pravděpodobností. To jest diskrétní pravděpodobnostní prostor (Ω, P) takový, že Ω je spočetně nekonečná a platí

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega \,:\, P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}).$$