Úloha 1. Najděte nějaký souvislý rovinný graf G, jehož všechny vrcholy mají stupeň právě 5 (dokažte to nalezením rovinného nakreslení G). [4 body]

Ukažte, že takové grafy lze najít libovolně velké (tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje 5-regulární rovinný graf s alespoň n vrcholy). [3 body]

Úloha 2. Najděte charakterizaci souvislých rovinných grafů takových, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení neobsahuje žádnou smyčku.

[6 bodů]

Úloha 3. Řekneme, že graf G lze obarvit k barvami, pokud existuje funkce $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ taková, že platí $\forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \implies c(u) \neq c(v)$. Tj. každému vrcholu přiřadíme číslo 1 až k a požadujeme, aby sousední vrcholy měly různé číslo.

Bez použití Věty o čtyřech barvách dokažte, že rovinný graf G bez trojúhelníků (tj. bez K_3 jako podgrafu) lze obarvit čtyřmi barvami.

[3 body]