Úloha 1. Mějme souvislý graf G, který obsahuje vrchol stupně k. Dokažte, že G obsahuje k vrcholů $v_1, \dots, v_k$ takových, že smazání jejich libovolné podmnožiny zachová souvislost grafu. [5 bodů]

Úloha 2. Nechť T je strom s n vrcholy, $n \geq 2$. Jako p_i označíme počet vrcholů T stupně $i \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \ldots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

[5 bodů]

Úloha 3. Mějme graf souvislý $G = (V, E)$. Pro vrcholy $u, v \in V$ definujme hodnotu $d_G(u, v)$ jako délku nejkratší cesty z u do v. Mluvíme o vzdálenosti vrcholů u a v v grafu G.

a) Dokažte, že funkce $d_G : V \times V \to \mathbb{R}$ je *metrika*. Tedy, že splňuje následující vlastnosti:

   (i) $d_G(u, v) \geq 0$ a $d_G(u, v) = 0$ právě když $u = v$,

   (ii) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$ pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$,

   (iii) $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$ pro každou trojici vrcholů $u, v, w \in V$. [2 body]

b) Všimněme si, že funkce d_G navíc splňuje ještě následující:

   (iv) $d_G(u, v)$ je celé číslo pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$,

   (v) pokud $d_G(u, v) > 1$, potom existuje vrchol w takový, že $d_G(u, v) = d_G(u, w) + d_G(w, v)$.

   Dokažte, že pokud funkce $d : M \times M \to \mathbb{R}$ splňuje podmínky (i)-(v), potom existuje graf H s množinou vrcholů M takový, že $d(u, v) = d_H(u, v)$ pro každou dvojici prvků $u, v \in M$. [5 bodů]