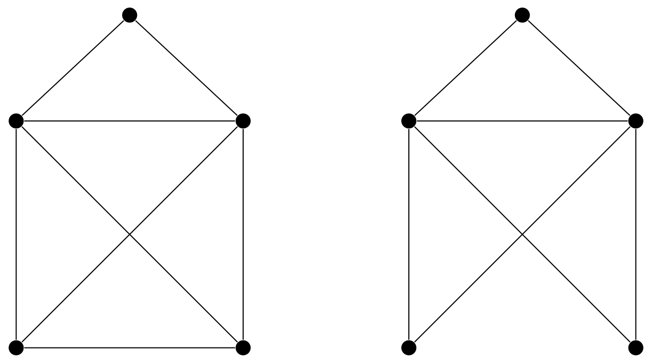
Úloha 1. Mějme orientovaný graf, který má všechny výstupní stupně alespoň 1. Ukažte, že pak obsahuje nějaký uzavřený tah.

Úloha 2. Rozhodněte, zda jde graf domečku obtáhnout jedním uzavřeným tahem. Pokud ano, najděte takový tah. Co u domečku bez podlahy?



Úloha 3. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Úloha 4. Uvažte množinu vrcholů $V = \{1, \ldots, n\}$. Kolik je na této množině různých (byť izomorfních) grafů:

a) K_n

b) P_n

c) C_n

d) $K_{k,n-k}$ v závislosti na K

e) Grafů v nichž má každý vrchol právě jednoho souseda.

Úloha 5. Může existovat graf s následujícím skóre? Pokud ano, najděte jej. Pokud ne, zdůvodněte.

a) $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$

b) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$

c) $(1, 1, 2, 3, 3, 6)$

d) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$

e) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$

Úloha 6. Ukažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $m/2$ hranami.

Úloha 7. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 8. Nechť G je graf. *Line graf* grafu G, značíme $L(G)$, je graf jehož vrcholy odpovídají hranám G, přičemž vrcholy reprezentující hrany e a f spolu sousedí pokud e a f mají společný vrchol (v G).

Ukažte, že je-li G eulerovský, potom je $L(G)$ také eulerovský. Platí to i naopak?

Úloha 9. Matice sousednosti grafu G je čtvercová matice A o rozměrech $V(G) \times V(G)$, kde $A_{ij} = 1$, pokud jsou vrcholy i a j spojeny hranou, $A_{ij} = 0$ jinak. Napište matici sousednosti A grafu $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 13, 23, 34\})$. Spočítejte A^2, jaké hodnoty vidíte na diagonále? Co u A^3?

Úloha 10. Mějme souvislý graf G a nějaké jeho dvě cesty maximální délky. Dokažte, že tyto dvě cesty mají alespoň jeden společný vrchol.