Úloha 1. Uvažte následující dva výroky:

a) Existuje číslo M takové, že pro každé x máme $x \leq M$.

b) Pro každé x existuje číslo takové, že $x \leq M$.

Napište negace obou výroků a popište jejich vzájemný vztah.

Úloha 2. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n, n \in \mathbb{N}$, které chybí jedno políčko. Ukažte, že je možné šachovnici vydláždit dlaždicemi ve tvaru písmene „L“.

Úloha 3. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Úloha 4. Definujme Fibonacciho posloupnost následovně: $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dokažte následující vlastnosti:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

b) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

c) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

Úloha 5 (*). Definujme n-té harmonické číslo H_n následovně:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dokažte následující identity:

a) $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$

b) $\sum_{i=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$