

Lineární algebra II

22. 2. 2017

Cvičící: Lukáš Folwarczný

Web cvičení: <http://iuuk.mff.cuni.cz/~folwar/>

1. Spočítejte:

- (a) $\langle x, y \rangle$,
- (b) jsou x, y na sebe kolmé?
- (c) $\|x\|, \|y\|$,
- (d) vzdálenost x od y ,

pro

- (a) $x = (2, 1, 4, -1), y = (4, -1, 0, 2)$,
- (b) $x = (1, 2, 1, -2i), y = (i, 2i, i - 1, 2)$.

2. Najděte všechny vektory jednotkové délky kolmé na $(3, -2)$.

3. Rozhodněte, zda následující je skalární součin v \mathbb{R}^2 :

- (a) $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$
- (b) $\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$
- (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
- (d) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

4. Ověřte, že $\|x\| := |x_1 - x_2| + |x_2|$ je normou na \mathbb{R}^2 .

5. Pro různé druhy norem na \mathbb{R}^2 si nakreslete jednotkovou kružnici $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$.

6. Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$$

(Nápověda: Použijte Cauchy-Schwarzovu nerovnost.)

7. Dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem, tj. pro každé $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$