Lineární algebra I – Domácí úkoly 2

6. 12. 2016

Termín odevzdání: 20. 12. 10:40

1. Spočítejte

   (a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

   (b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}^{-1}$$

   [5 bodů]

2. Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Najděte jejich cykly, znaménka a složení $p \circ q, q \circ p$. **[5 bodů]**

3. Nechť p je prvočíslo a $a \in \{1, \dots, p-1\}$.

   (a) Dokažte $\{1, 2, \dots, p-1\} = \{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$ v $\mathbb{Z}_p$.

   (b) Dokažte $a^{p-1} = 1$ v $\mathbb{Z}_p$. (Tvrzení je známo jako Malá Fermatova věta. Nápověda: Využijte (a).)

   [5 bodů]

4. Buďte u, v, w lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé:

   (a) u, $u + v$, $u + w$

   (b) $u + v$, $u + w$, $v + w$

   (c) $u + v$, $u - v$, $u + w$, $u - w$

   [5 bodů]