Lineární algebra I

3. 1. 2017

Cvičící: Lukáš Folwarczný
Web cvičení: `http://iuuk.mff.cuni.cz/~folwar/`

1. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané: $f(e_1) = (1, -1, 1), f(e_2) = (0, 1, 1)$. Mějme báze $B_1 = \{(1, -1), (1, 1)\}$ a $B_2 = \{(1, -1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

   Spočítejte:

   (a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{kan}[f]_{kan}$,

   (b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{kan}[f]_{B_1}$,

   (c) matici zobrazení od kanonické báze k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{kan}$,

   (d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

2. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané

$$ {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

   vzhledem k bázi $B = \{1, 1 + x, x^2\}$. Najděte ${}_{B'}[f]_{B'}$, je-li $B' = \{1, x, 1 + x^2\}$.

3. Určete ${}_{kan}[f \circ g]_{kan}$ pro lineární zobrazení $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná

$$ f(a, b, c) = (a - c, b - a, b + c)^T, $$

$$ g(a, b, c) = (a + b + c, b + c, c)^T. $$

4. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$ {}_{B_2}[f]_{B_1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, $$

   kde uvažované báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{P}^2$ jsou

$$ B_1 = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 4)\}, $$

$$ B_2 = \{x^2 - 2x + 3, x - 1, 2x^2 + x\}. $$

   Určete dimenzi obrazu a jádra f, a najděte jejich báze.

5. Rozhodněte, zda zobrazení s předpisem $f(x, y, z) = (x+y-2z, y-z, x-y)$ je isomorfismem na prostoru $\mathbb{R}^3$.