Lineární algebra I

20. 12. 2016

Cvičící: Lukáš Folwarczný
Web cvičení: `http://iuuk.mff.cuni.cz/~folwar/`

1. Určete dimenzi a najděte bázi jádra matice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rozhodněte, zda následující zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

   (a) $f(x, y) = (x, y + 3)$,

   (b) $f(x, y) = (0, 0)$,

   (c) $f(x, y) = (x + 2y, y)$,

   (d) $f(x, y) = (x^2, y)$.

3. Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení. Dokažte, že pro každé $x_1, \ldots, x_n \in U$ platí:

$$f(\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathrm{span}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$

4. Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi kan:

   (a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu,

   (b) otočení o 90° kolem počátku proti směru hodinových ručiček,

   (c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček,

   (d) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

5. Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
   $A = \{(1, 2, 0, 1)^T, (4, 1, 3, 1)^T, (3, 1, 3, 4)^T, (2, 0, 2, 2)^T\}$,
   $B = \{(1.2, 3, 1)^T, (4, 4, 1, 1)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (3, 1, 4, 0)^T\}$.

   Nalezněte matice přechodu:

   (a) ${}_{\mathrm{kan}}[id]_A$, tj. od báze A ke kanonické bázi,

   (b) ${}_B[id]_{\mathrm{kan}}$, tj. od kanonické báze k bázi B,

   (c) ${}_B[id]_A$, tj. od báze A k bázi B.

6. Určete matici přechodu od báze B do báze B' prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}, \quad B' = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}.$$