6. Písemka z Matematických dovedností (4.1.2011) + Řešení

1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel. [2]

   Řešení: Pro spor předpokládejme, že prvočísel je jen k, a označme si je $p_1, p_2, \ldots p_k$. Uvažujme číslo $t = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$. Pro každé i je zbytek po dělení čísla t prvočíslem p_i vždy 1, a tedy t není dělitelné žádným prvočíslem. Číslo t je prvočíslo různé od všech p_i, což je spor s tím, že $p_1, \ldots, p_k$ jsou všechna prvočísla. $\square$

2. Dokažte, že pokud xy je sudé, pak alespoň jedno z x, y je sudé. [2]

   Řešení - důkaz obměnou implikace: Chceme dokázat, že pokud x i y jsou lichá čísla, pak xy je liché. Máme tedy $x = 2k + 1$ a $y = 2l + 1$ pro nějaká celá čísla k, l. Po roznásobení $xy = 2(2kl + k + l) + 1$, tedy xy je liché. $\square$

3. Vypište všechny prvky následující množiny a svoji odpověď zdůvodněte.

$$\bigcup_{k=2}^{5} \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq 100 \\ j \text{ je dělitelné } k}} \{l \in \mathbb{N} : \ 95 \leq l \leq j\}$$

[2]

   Řešení: $95, 96, 97, 98, 99, 100$

   Jedná se o prvky například množiny $\{l \in \mathbb{N} : \ 95 \leq l \leq j\}$ pro $k = 2$ a $j = 100$. Pro toto k a j platí $k|j$ a tyto prvky tedy budou ve výsledné množině.

   Žádné další číslo ve výsledné množině nebude, protože sjednocujeme množiny přirozených čísel mezi 95 a j, kde $j \leq 100$.

4. Najděte protipříklad na následující nepravdivé tvrzení a odhalte, kde je v jeho důkaze chyba. [2]

   Tvrzení. *Pro každé $n \geq 0$ platí, že každá množina M, která obsahuje 2^n přirozených čísel, mezi nimiž se vyskytuje číslo 2, má neprázdnou podmnožinu se součtem prvků dělitelným 2^{n+1}.*

   Důkaz indukcí:

   Pro $n = 0$ je jedinou množinou splňující předpoklady množina $\{2\}$, která tvrzení splňuje.

   Pro $n \geq 1$ rozdělíme M na dvě poloviny. V každé polovině z indukčního předpokladu najdeme podmnožinu se součtem dělitelným 2^n. Pokud součet prvků jedné z těchto dvou podmnožin je dělitelný 2^{n+1}, pak tato podmnožina dokazuje tvrzení pro M. V opačném případě je součet každé z těchto dvou podmnožin lichý násobek 2^n a potom je sjednocení těchto dvou podmnožin podmnožina M, jejíž součet je sudý násobek 2^n, tedy číslo dělitelné 2^{n+1}.

   Řešení: Indukční předpoklad lze aplikovat pouze na množiny obsahující číslo 2, což jedna ze dvou množin, na které jsme M rozdělili, splňovat rozhodně nebude. Protipříkladem je např. $n = 1$ a $M = \{1, 2\}$ — součty neprázdných podmnožin M jsou 1, 2 a 3, tedy žádný násobek $2^2 = 4$.