5. Písemka z Matematických dovedností (7.12.2010)

Dokažte:

1. Pro každé přirozené $n \geq 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$
[2]

   Řešení indukcí: Pro $n = 2$ vyjde po dosazení $1/2 = 1/2$, tvrzení tedy platí.

   Pro $n > 2$
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} \overset{IP}{=} \frac{1}{n(n-1)} + 1 - \frac{1}{n-1} =$$
$$= \frac{1 + n(n-1) - n}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 2n + 1}{n(n-1)} = \frac{(n-1)^2}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

2. Libovolnou částku peněz větší než 4 Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun. [2]

   Řešení indukcí: Pro $n = 5$ vezmeme jednu pětikorunu a pro $n = 6$ tři dvoukoruny. Pro $n > 6$ poskládáme z indukčního předpokladu částku $n-2$ ($n-2 > 4$ a tedy indukční předpoklad použít lze) a přidáme jednu dvoukorunu.

3. Pokud má graf G n vrcholů a k hran ($n \geq 2$) a každý vrchol má alespoň jednoho a nejvýše dva sousedy, pak je počet vrcholů s právě jedním sousedem roven $2(n-k)$. [2]

   Řešení počítáním dvěma způsoby: Označme x počet vrcholů s právě jedním sousedem. Součet stupňů vrcholů je potom $2(n-x)+x$. Součet stupňů také dostaneme, pokud vynásobíme dvěma počet hran. Tedy
$$\begin{aligned} 2(n-x) + x &= 2k \\ 2n - x &= 2k \\ x &= 2(n-k) \end{aligned}$$

4. Pro každou dvojici reálných čísel a, b platí $|a+b| \leq |a| + |b|$. [2]

   Řešení rozborem případů:

   (a) $a \geq 0 \;\&\; b \geq 0$: Potom $|a| = a$, $|b| = b$ a $|a+b| = a+b$ a tedy tvrzení platí dokonce s rovností.

   (b) $a < 0 \;\&\; b < 0$: Potom $|a| = -a$, $|b| = -b$ a $|a+b| = -(a+b)$ a tedy tvrzení platí dokonce s rovností.

   (c) Právě jedno z čísel a, b je záporné, BÚNO $a \geq 0, b < 0$.

      i. $a + b \geq 0 : |a+b| = a + b \overset{b<0}{<} a - b = |a| + |b|$.

      ii. $a + b < 0 : |a+b| = -a - b \overset{a\geq 0}{\leq} a - b = |a| + |b|$.