3. Písemka z Matematických dovedností (16.11.2010) + Řešení

1. Přepište slovní tvrzení do formulí s kvantifikátory. Pokud není uvedena doména, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

   (a) Žádné číslo z množiny M není větší než 57. [1 bod]

   (b) Pokud každé sudé číslo patří do množiny M, pak žádné sudé číslo nepatří do množiny N. [1 bod]

   (c) Pokud pro každé číslo z množiny A existuje k němu menší číslo v množině B, pak všechna čísla v A jsou větší než 5. [1 bod]

   Příklady možných řešení:

   (a) $\forall n \in M : n \leq 57$

   (b) $(\forall x \in \mathbb{N} : 2 \mid x \Rightarrow x \in M) \Rightarrow (\forall x \in N : 2 \nmid x)$

   (c) $(\forall a \in A\ \exists b \in B : b < a) \Rightarrow (\forall a \in A : a > 5)$

2. Pokud to lze, zvolte vždy množinu A jednou tak, aby tvrzení platilo, a jednou tak, aby neplatilo. Za A pokaždé volte nějakou podmnožinu $\mathbb{R}$. Pokud to nelze, zdůvodněte, proč.

   (a) $\exists x \in A \big((\forall y \in A : y = x + 1) \Rightarrow x^2 < 1\big)$ [2 body]

   Řešení: Aby tvrzení neplatilo, stačí zvolit $A = \emptyset$, protože pak v A žádné x neexistuje. Naopak pro libovollné $A \neq \emptyset$ tvrzení platí. Např. pro $A = \mathbb{N}$ a $x = 1$ je $\forall y \in A : y = x + 1$ nesplněno a celá implikace tedy splněna.

3. Které z následujících rovností jsou pravdivé pro každou možnou volbu množin M, N, O? Tam, kde neplatí rovnost, rozhodněte, zda jedna ze stran je podmnožinou druhé.

   (a) $M \setminus (M \setminus N) = M \cup N$ [1 bod]

   (b) $(M \cap N) \cup O = (M \cup O) \cap (N \cup O)$ [1 bod]

   Řešení:

   (a) $M \setminus (M \setminus N) \subset M \cup N$, ale rovnost ne vždy platí (např. neplatí pro $M = \{1\}$ a $N = \{2\}$).

   (b) Vždy platí.