9) Důkaz sporem. Důkaz nepřímý (obměnou implikace).

Důkaz sporem

- Předpokládáme (pro spor), že neplatí závěr dokazovaného tvrzení, ale platí jeho předpoklady.
- Z toho odvodíme spor, tedy např. to, že neplatí předpoklady, nebo že neplatí nějaké známé tvrzení.
- Např. v příkladě 1 může vyjít, že $1 \leq 0$.
- Na důkaz indukcí se dá také dívat jako na důkaz sporem: Pokud chceme dokázat, že pro každé $n \geq n_0$ platí dané tvrzení, pak pro spor předpokládáme, že pro nějaké n neplatí a vezmeme nejmenší takové n. To je buď n_0 (vyvrátíme 1. indukčním krokem), nebo tvrzení platí pro $n-1$ a 2. indukční krok vede ke sporu.

Dokažte sporem:

1. Neexistuje největší přirozené číslo.
2. Neexistuje nejmenší kladné racionální číslo.
3. Dokažte, že pomocí dílků tvaru L (složených ze 3 čtverečků) nelze bez překryvu pokrýt desku velikosti $2^n \times 2^n$.
4. Pro žádnou dvojici a, b kladných přirozených čísel neplatí $a^2 - b^2 = 1$. (Nápověda: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.)
5. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. (Nápověda: Dokažte, že pokud $p^2 = 2q^2$, pak p i q jsou sudá.)
6. Existuje nekonečně mnoho prvočísel. (Nápověda: Pokud $a_1, \ldots, a_k > 1$, pak $a_1 \cdot \cdots \cdot a_k + 1$ není dělitelné žádným z a_i.) Zkuste důkaz přeformulovat na důkaz indukcí.

Důkaz nepřímý (obměnou implikace)

- To, že $P \Rightarrow Q$ dokážeme pomocí $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- Není v zásadě nic jiného než speciální případ důkazu sporem.

Dokažte obměnou:

1. Jestliže $n^2 + 2$ není dělitelné třemi, pak n je dělitelné třemi.
2. Pokud xy je sudé, pak alespoň jedno z x, y je sudé.
3. Pokud xy je liché, pak x i y jsou liché.
4. Pokud a a b jsou reálná a ab je iracionální, pak alespoň jedno z a, b je iracionální.