8) Matematická indukce. Dokazovací strategie.

- Na tvrzení typu: "Pro každé přirozené $n \geq n_0$ dokažte ..."
  - Nejdřív dokážeme pro n_0 (1. indukční krok) a potom to, že pro každé $n > n_0$ plyne z platnosti tvrzení pro $n-1$ platnost i pro n (2. indukční krok).
  - Pokud je dokazované tvrzení nějaká rovnost a postupujete úpravami od tvrzení pro n k tvrzení pro $n-1$, nezapomeňte, že můžete dělat jen ekvivalentní úpravy.
  - *Indukční předpoklad (IP)* = tvrzení pro $n-1$
  - Ve 2. indukčním kroku se někdy platnost tvrzení pro n dokazuje z platnosti pro jiné $i < n$ než $i = n-1$ - viz příklad 8. (Někdy je dokonce potřeba využít více různých $i < n$.) Pak je potřeba 1. indukční krok udělat pro několik malých n.
- Obecněji se indukcí dokazují tvrzení i pro jiné objekty než přirozená čísla. Např. pro množiny, grafy, permutace, ... Viz příklady 9- 11. Postup je pak takovýto:
  - Objekty si vhodně uspořádáme (např. grafy podle počtu vrcholů, nebo hran).
  - V 1. kroku dokážeme pro malé objekty.
  - Ve 2. kroku chceme dokázat pro každý objekt velikosti n. Např. z daného grafu G na n vrcholech vhodně odebereme 1 vrchol, dostaneme menší graf, pro který dokazované tvrzení platí, a ukážeme, že tvrzení bude platit i po přidání předtím odebraného vrcholu, a tedy platí pro graf G.
  - POZOR na následující postup: "Tvrzení platí pro každý objekt velikosti $n-1$ a po jeho zvětšení na velikost n bude platit stále, tedy tvrzení platí i pro objekty velikosti n." Potom je nutné zdůvodnit, že tím zvětšováním vyrobíme všechny objekty velikosti n.
  - Postup uvedený u předchozího bodu svádí např. k (nevhodnému) užití indukce k důkazu tvrzení: Pokud má graf G $n-1$ hran a n vrcholů ($n \geq 2$) a každý vrchol má alespoň jednoho a nejvýše dva sousedy, pak je počet vrcholů s právě jedním sousedem roven 2.

Dokažte pomocí matematické indukce:

1. Pro každé přirozené $n \geq 1$:
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Pro každé přirozené $n \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k = \frac{3}{2}(3^n(n^2 - n + 1) - 1).$$
3. Pro každé přirozené $n \geq 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$
4. Pro každé přirozené $n \geq 2$:
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$
5. Pro každé $n \geq 0$ platí $6 | 4n^3 + 2n$ (tj. $4n^3 + 2n$ je dělitelné 6).
6. Pro každé $n \geq 1$ platí $24 | 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$. (Indukci bude možná potřeba použít dvakrát)

7. Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$:
$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$
Postupujte indukcí podle n při pevném r; v 1. indukčním kroku je nutné uvažovat všechny případy s $\mathbf{n} = \mathbf{r}$.

8. Dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4 Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun.

9. Každá množina velikosti n má právě 2^n různých podmnožin.

10. Každá množina $M \subset \mathbb{N}$ velikosti 2^{n+1} má podmnožinu takovou, že součet jejích prvků je dělitelný 2^n.

11. Pokud má graf G n vrcholů a k hran ($n \geq 2$) a každý vrchol má alespoň jednoho a nejvýše dva sousedy, pak je počet vrcholů s právě jedním sousedem roven $2(n-k)$.

Počítání dvěma způsoby

Příklad 11 lze řešit tak, že si dvěma způsoby vyjádříme součet stupňů vrcholů (jednou jako $2k$ a jednou jako $x + 2(n-x)$, kde x je počet vrcholů stupně 1).

Rozbor případů

1. Přirozené číslo n je dělitelné pěti právě tehdy, když $n^4 - 1$ není dělitelné pěti.
2. Z každých 5 bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na přímce lze vybrat 4 v konvexní poloze.
3. Pro každou dvojici reálných čísel a, b platí $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Holubníkový princip

"Máme $kn+1$ holubů v n holubnících. Pak v některém holubníku musí být $k+1$ holubů."

1. Z každých n čísel lze vybrat podmnožinu se součtem dělitelným n.
2. Z libovolných 6 lidí lze vybrat 3, kteří se navzájem znají, nebo 3, kteří se navzájem neznají. Předpokládáme, že relace "znát se" je symetrická.
3. Kolik lze maximálně rozmístit střelců na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali?

Hledání protipříkladu

- Pokud je v zadání "Rozhodněte, zda platí", může stačit najít protipříklad.
- Zkoušet konstruovat protipříklad se vyplatí i pokud zadané tvrzení platí. Pomůže to se získáním vhledu do problému. (zkuste si to např. u úlohy 2 z holubníkového principu)

Rozhodněte, zda platí:

1. Pro každé přirozené $n \geq 2$ je $2^n - 1$ prvočíslo.

Invariant

Děláme akce, které sice studovaný objekt mění, ale nějaká jeho vlastnost (tzv. *invariant*) zůstává zachována.

1. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 2n$ (n je liché přirozené). Můžeme smazat libovolná dvě čísla a, b a místo nich napsat $|a-b|$. Toto opakujeme dokud nezbyde jen jedno. Dokažte, že poslední zbylé číslo je liché.
2. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?