5) Pravdivost formulí. Množinové operace.

1. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

   (a) Každé přirozené číslo je sudé nebo liché.

   (b) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : y \geq x$

   (c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : y = x + 1$

   (d) $\exists x \in \mathbb{N} \big(\forall y \in \mathbb{N}\ (y = x + 1 \Rightarrow x^2 < 1)\big)$

   (e) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{Z} : x + y + z = -56$

   (f) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{Z} : x + y + z \geq -56$

   (g) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : (x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N} : x < z \wedge z < y))$.

   (h) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : y < x \Rightarrow y = 1$.

   (i) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : (8|x\ \&\ 3|y) \Rightarrow 64|x^y$

   (j) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : (8|x\ \&\ 3|y) \Rightarrow 9|x^y$

2. Pokud to lze, zvolte vždy množinu A jednou tak, aby tvrzení platilo, a jednou tak, aby neplatilo. Za A pokaždé volte nějakou podmnožinu $\mathbb{R}$. Pokud to nelze, zdůvodněte, proč.

   (a) $(\exists x \in A\ \forall y \in A : y = x + 1) \Rightarrow (\forall x \in A : x < 0)$

   (b) $\exists x \in A \big((\forall y \in A : y = x + 1) \Rightarrow x^2 < 1\big)$

   (c) $\exists x \in A \big(\forall y \in A\ (y = x + 1 \Rightarrow x^2 < 1)\big)$

Přídavky k výrokové a predikátové logice

Dovětek k převodu na prenexní tvar: Při přepisování implikace (jakož i jiného operátoru), na jejíchž obou stranách jsou kvantifikátory, je jejich vzájemné pořadí ve výsledném prenexním tvaru nepodstatné. Je potřeba pouze dodržet pořadí v rámci kvantifikátorů, které přišly z předpokladu implikace a v rámci těch, které přišly z důsledku implikace. (Rozmyslete si, že to plyne z pravidel ze 3. cvičení.) Následující převody (a nejen tyto) jsou tedy všechny správně:

$$(\forall a \exists b P(a,b)) \Rightarrow (\forall c \exists d Q(c,d)) \qquad \begin{array}{l} \exists a \forall b \forall c \exists d : (P(a,b) \Rightarrow Q(c,d)) \\ \exists a \forall c \forall b \exists d : (P(a,b) \Rightarrow Q(c,d)) \\ \forall c \exists d \exists a \forall b : (P(a,b) \Rightarrow Q(c,d)) \end{array}$$

1. Napište negaci k výroku: "Obchod je otevřen právě tehdy, když je všední den."

2. Převeďte do prenexního tvaru a rozhodněte, zda platí:

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \Rightarrow x \geq -x))\ \&\ \neg(\exists x \in \mathbb{R}\ (x < 0\ \&\ x > -x))$
   Řešení: $\forall x \in \mathbb{R}\ ((x \geq 0 \Rightarrow x \geq -x)\ \&\ (x \geq 0\ \vee\ x \leq -x))$ Platí.

   (b) $\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \Rightarrow x \geq -x))\ \&\ (\exists x \in \mathbb{R}\ (x < 0\ \&\ x > -x))$
   Řešení: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0\ \&\ x < -x\ \&\ x < 0\ \&\ x > -x)$ Neplatí.

   (c) $(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}(y < x \vee y^2 < x)) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}(x < z \Rightarrow z^2 < x))$
   Řešení: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \exists t \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} : ((y < x \vee y^2 < x) \Rightarrow (t < z \Rightarrow z^2 < t))$ Platí.

   (d) $(\exists x \in \mathbb{R}\ (\forall y \in \mathbb{R}\ (y > 0 \Rightarrow x \geq y))) \Rightarrow (\exists z\ (z \in A\ \&\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ (\varepsilon > 0\ \&\ z + \varepsilon \notin A))))$
   Řešení: $\exists z\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ ((y > 0 \Rightarrow x \geq y) \Rightarrow (z \in A\ \&\ \varepsilon > 0\ \&\ z + \varepsilon \notin A))$ Platí.

Množinové operace

Nic nového:

$x \in (M \cap N)$	$(x \in M) \& (x \in N)$
$x \in (M \cup N)$	$(x \in M) \vee (x \in N)$
$x \in (M \setminus N)$	$(x \in M) \& (x \notin N)$
$M \subseteq N$	$\forall x : x \in M \Rightarrow x \in N$
$M = N$	$\forall x : x \in M \Leftrightarrow x \in N$

Většinou je ale jednodušší úlohy řešit pomoci obrázku (tzv. Vennova diagramu).

Úlohy

Které z následujících rovností jsou pravdivé pro každou možnou volbu množin M, N, O? Tam, kde neplatí rovnost, rozhodněte, zda jedna ze stran je podmnožinou druhé.

1. $M \setminus N = M \setminus (M \cap N)$
2. $M \setminus (M \setminus N) = M \cup N$
3. $M \cup (N \setminus M) = M \cup N$
4. $(M \cap N) \cup O = (M \cup O) \cap (N \cup O)$
5. $(M \cap N) \setminus O = (M \setminus O) \cap (N \setminus O)$
6. $M \cup (N \setminus O) = M \cup N$