3) Obměňování implikací. Kvantifikátory a prenexní tvar

Úlohy

1. Obměňte následující implikace (tj. tvrzení "$A \Rightarrow B$" přepište na "$\neg B \Rightarrow \neg A$")
   (a) Pokud je dnes pondělí, budeme psát písemku.
   (b) Jestliže $x > 105$, potom $x > 104$.
   (c) Jestliže jsem root, potom můžu zakládat uživatelské účty a můžu měnit práva k souborům.
   (d) Jestliže chodím na přednášku z analýzy a chodím na přednášku z diskrétní matematiky, potom se přednáška z analýzy a přednáška z diskrétní matematiky nekonají ve stejný čas.
   (e) Pokud existuje liché prvočíslo, pak pro žádné $x \in \mathbb{N}$ neexistuje $y \in \mathbb{N}$ takové, že $y > x$.
   (f) Pokud x je dělitelné 6 a y je dělitelné 7, pak $x \cdot y$ je sudé.
   (g) $(\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y = x + 1) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y = x + 1)$.
   (h) Máš-li pravdu, jsem čínský bůh srandy.

2. Zvolte množiny, přes které se kvantifikuje, a dosaďte predikát "ze života" tak, aby platilo:
   (a) $\forall x \exists y\ P(x, y)$
   (b) $\exists y \forall x\ P(x, y)$
   (c) Aby platilo $\forall x \exists y\ P(x, y)$, ale neplatilo $\exists y \forall x\ P(x, y)$.
   (d) Aby tvrzení $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ platilo, ale $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$ neplatilo.
   (e) Aby tvrzení $(\exists y\ R(y)) \wedge (\exists y\ S(y))$ platilo, ale tvrzení $\exists y\ (R(y) \wedge S(y))$ neplatilo.
   (f) Aby platilo $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\forall x\ Q(x))$, ale neplatilo $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$.

Prenexní tvar

Další sada pravidel, tentokrát s cílem dostat formuli do prenexního tvaru, tj. všechny kvantifikátory na začátek formule (např. $\forall x \forall y \exists z V(x, y, z)$).

$(\forall x P(x))\&(\forall x Q(x))$	$\forall x(P(x)\&Q(x))$	
$qxP(x)\diamondsuit Q$	$qx(P(x)\diamondsuit Q)$, kde	$\diamondsuit$ je &, nebo $\vee$, q je $\forall$, nebo $\exists$ a proměnná x se v Q nevyskytuje
$P \Rightarrow \forall x Q(x)$	$\forall x(P \Rightarrow Q(x))$	
$P \Rightarrow \exists x Q(x)$	$\exists x(P \Rightarrow Q(x))$	
$\forall x P(x) \Rightarrow Q$	$\exists x(P(x) \Rightarrow Q)$	
$\exists x P(x) \Rightarrow Q$	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q)$	
$(\forall x P(x))\&(\exists x Q(x))$	$\forall x \exists y(P(x)\&Q(y))$	(jednu z proměnných můžeme přejmenovat
$(\forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x))$	$\exists x \exists y(P(x) \Rightarrow Q(y))$	a pak použít předchozí pravidla)

3. Převeďte do prenexního tvaru
   (a) Pokud zazní požární alarm, musíme všichni opustit budovu.
   (b) Pokud s tím někdo souhlasí, bude na příštím semináři zase písemka.
   (c) Bude-li každý z nás z křemene, je celý národ z kvádrů.
   (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 0 \Rightarrow x \geq (-x)) \Rightarrow \neg((\exists x \in \mathbb{R})(x < 0 \wedge x > (-x)))$
   (e) $(\exists x \in \mathbb{R})((\forall y \in \mathbb{R})(y < x \Rightarrow y^2 < x) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R})(x < z \Rightarrow z^2 < x))$
   (f) $((\exists x)(x \in A \wedge (\forall y)(y \in A \Rightarrow x \geq y))) \Rightarrow ((\exists x)(x \in A \wedge (\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \wedge (x + \varepsilon) \notin A)))$
   (g) Pokud existuje liché prvočíslo, pak pro žádné $x \in \mathbb{N}$ neexistuje $y \in \mathbb{N}$ takové, že $y > x$.