10) Hledání chyb v "důkazech".

Žádné z níže uvedených tvrzení není pravdivé. Odhalte, kde je v uvedených "důkazech" chyba a zkuste případně i najít protipříklady. Které chyby jsou na podobném principu? Jednotlivé typy chyb stručně a výstižně popište (několika slovy).

Tvrzení 1. *Pro každou trojici $a, b, n \geq 1$ přirozených čísel platí: $max(a, b) = n \Rightarrow a = b$.*

Důkaz indukcí: Pokud $n = 1$, pak z $max(a, b) = 1$ a z $a, b \geq 1$ plyne, že $a = b = 1$.

Pokud $n \geq 2$ a platí $max(a, b) = n$, pak zřejmě $max(a-1, b-1) = n-1$ a z indukčního předpokladu $a - 1 = b - 1$. Z toho plyne $a = b$.

Tvrzení 2. *Souvislý graf G má $n \geq 2$ vrcholů, alespoň $n - 1$ hran a každý vrchol má stupeň 1, nebo 2. Pak G má právě 2 vrcholy stupně 1.*

Důkaz indukcí: Pro $n = 2$ je jediný takový graf (2 vrcholy spojené hranou) a ten tvrzení splňuje.

Pro $n \geq 3$ najdeme v G vrchol v stupně 1. Ten má jediného souseda a ten soused má stupeň 2, protože jinak by s v tvořily komponentu souvislosti velikosti 2 a G by nebyl souvislý (spor s předpoklady). Odebráním v a hrany z něj vedoucí se počet vrcholů i hran sníží o 1. Na výsledný graf G' aplikujeme indukční předpoklad a má tedy právě 2 vrcholy stupně 1. Jeden z nich má v G stupeň 2, ale na druhou stranu G obsahuje oproti G' 1 vrchol stupně 1 navíc. Graf G má tedy také 2 vrcholy stupně 1.

Tvrzení 3. *Lze vytvořit relaci "znát se" na 6 lidech tak, že není žádná trojice, kde by se všichni navzájem znali, nebo všichni navzájem neznali. Jinými slovy není pravda, že by z každých 6 lidí šlo vybrat 3, kteří se buď všichni navzájem znají, nebo neznají. (Ještě jinak řečeno: existuje graf G na 6 vrcholech bez kliky velikosti 3 a bez nezávislé množiny velikosti 3.)*

Důkaz sporem: Trojici lidí nazveme špatnou, pokud se buď všichni navzájem znají, nebo ne. Pro spor mezi každými šesti lidmi najdeme špatnou trojici. Označme je A, B, C. Vezmeme tu samou šestici lidí, jen změníme relaci u dvojice A, B (pokud se neznali, tak se znát budou a naopak). Dostali jsme tedy šestici lidí, kde trojice A, B, C není špatná, což je hledaný spor.

Tvrzení 4. *Pro každé $n \geq 0$ platí, že každá množina M, která obsahuje 2^n přirozených čísel, mezi nimiž se vyskytuje číslo 2, má neprázdnou podmnožinu se součtem prvků dělitelným 2^{n+1}.*

Důkaz indukcí: Pro $n = 0$ je jedinou množinou splňující předpoklady množina $\{2\}$, která tvrzení splňuje.

Pro $n \geq 1$ rozdělíme M na dvě poloviny. V každé polovině z indukčního předpokladu najdeme podmnožinu se součtem dělitelným 2^n. Pokud součet prvků jedné z těchto dvou podmnožin je dělitelný 2^{n+1}, pak tato podmnožina dokazuje tvrzení pro M. V opačném případě je součet každé z těchto dvou podmnožin lichý násobek 2^n a potom je sjednocení těchto dvou podmnožin podmnožina M, jejíž součet je sudý násobek 2^n, tedy číslo dělitelné 2^{n+1}.

Tvrzení 5. *Každý graf G na $n \geq 1$ vrcholech má dva vrcholy stejného stupně.*

Důkaz sporem: Pro spor uvažujme graf G, kde všechny vrcholy mají různé stupně. Stupně vrcholů G nabývají hodnot $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, což je n různých hodnot, a tedy podle holubníkového principu musí pro každé číslo mezi 0 a $n - 1$ existovat vrchol, jehož stupeň je roven této hodnotě. Mimo jiné tedy máme vrchol v stupně $n - 1$, který je spojen s každým ze zbývajících vrcholů. Dále máme vrchol u stupně 0, který není spojen s žádným jiným vrcholem, tedy ani s v. To je ale spor s tím, že v je spojen s každým, tedy i s u.

Tvrzení 6. *Definujme posloupnost čísel* $(a_n)_{n=0}^{n=\infty}$ *rekurencí* $a_0 = 0, a_1 = 1$ *a* $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ *pro* $n \geq 2$. *Dokažte, že* $a_n = 2^{n-1}$ *pro každé* $n \geq 0$.

Důkaz indukcí: Pro $n = 1$ snadno ověříme z definice.

Pro $n > 1$ máme z indukčního předpokladu $\forall k < n : a_k = 2^{k-1}$. Dosazením do definice a_n dostáváme:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \overset{IP}{=} 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

Tvrzení 7. *Pro zadanou symetrickou irreflexivní relaci* R *na* n *prvcích máme za úkol nakreslit* n *křivek v rovině tak, aby se protínaly právě dvojice křivek, které jsou v relaci, a žádné jiné. Dokažte, že toho lze dosáhnout pro každou* R.

Důkaz indukcí: Pro $n = 1$ vezmeme libovolnou jednu křivku. Každou další křivku nakreslíme tak, aby protínala jen ty křivky, se kterými se protnout má.

Tvrzení 8. *Pro zadanou relaci* R *mezi* n *přímkami a* n *body máme za úkol nakreslit* n *bodů a* n *přímek v rovině tak, aby každá přímka obsahovala pouze body, se kterými je v relaci. Dokažte, že toho lze dosáhnout pro každou* R.

Důkaz přímý: Nejprve umístíme n bodů libovolně do roviny. Každou přímku pak vedeme právě těmi body, se kterými je v relaci.

Kontrolní otázka: Funguje tento důkaz, pokud bychom nemuseli používat přímky, ale libovolné křivky?

Tvrzení 9. *Definujme posloupnost čísel* $a1, a2, \ldots$ *pomocí soustavy rekurencí:*

$$a_1 = \frac{3}{2}$$
$$a_n = \frac{2}{a_{n-1} + 1} - 1 \text{ pro každé } n \geq 2$$

Tvrdíme, že $a_n \geq 0$ *pro každé* $n \geq 1$.

Důkaz indukcí: Pro $n = 1$ plyne tvrzení přímo z definice.

Předpokládejme, že $n > 1$. Jako indukční předpoklad (IP) máme nerovnost $a_{n-1} \geq 0$, a dokazujeme, že $a_n \geq 0$. Tj. dle definice a_n chceme dokázat nerovnost

$$\frac{2}{a_{n-1} + 1} - 1 \geq 0.$$

Nerovnost pomocí ekvivalentních úprav převedeme do jednoduššího tvaru:

$$\frac{2}{a_{n-1} + 1} \geq 1 \text{ (přičtení jedničky)}$$
$$2 \geq a_{n-1} + 1 \text{ (vynásobení kladným číslem } a_{n-1} + 1\text{, viz IP)}$$
$$1 \geq a_{n-1} \text{ (odečtení jedničky)}$$

Z nerovností $1 \geq a_{n-1}$ a $a_{n-1} \geq 0$ (IP) ihned plyne $1 \geq 0$, což je zjevně pravdivá nerovnost. Protože jsme k jejímu odvození použili jen ekvivalentní úpravy a indukční předpoklad, je pravdivá i původní nerovnost $a_n \geq 0$.

Z trochu jiného soudku (na následující tvrzení protipříklad najít nezkoušejte ;)

Sporem dokážeme, že každé přirozené číslo je zajímavé. Pro spor existuje nějaké nezajímavé číslo. Nechť n je nejmenší nezajímavé přirozené číslo. Být nejmenším nezajímavým číslem je ale rozhodně zajímavá vlastnost, což je spor s nezajímavostí n.