Náhradní DÚ z Lineární Algebry I

Pravidla: Za každou úlohu lze získat pouze plný počet bodů nebo nic. Dokud bude v řešení chyba, budu ho vracet, dokud nebude celé dobře. Výjimkou jsou drobné chyby v závěru výpočtu. Drobné chyby uprostřed výpočtu budu ale vracet k opravení - často způsobí významné zjednodušení (nebo ztížení) zbytku výpočtu.

Za každou písemku plus její náhradní domácí úlohy lze v součtu získat maximálně 6 bodů. Body nad tuto hranici se nepočítají; jedinou výjimkou je bonusový příklad z desáté série, který se do limitu této série nepočítá.

Náhradní za 1. písemku

1. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, která jsou řešením soustavy: **[1]**

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -3x + 9y &= -3 \end{aligned}$$

2. Najděte parabolu $y = ax^2 + bx + c$ procházející body $(-2, 8)$, $(5, 8)$ a $(4, 2)$. **[2]**

3. Najděte kružnici $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ procházející body $(-2, 7)$, $(2, 5)$ a $(-5, -2)$. **[2]**

Náhradní za 2. písemku

1. Převeďte následující matice na odstupňovaný tvar

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **[1]**

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **[1]**

   (c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **[1]**

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **[1]**

Náhradní za 3. písemku

1. Nalezněte všechna řešení soustav:

   (a) **[1]**

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

   (b) **[1]**

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

2. Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$ **[2]**

Náhradní za 4. písemku

1. Spočtěte:

   (a) $-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ **[1]**

   (b) $-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **[1]**

2. Dokažte, že pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a reálná čísla α, β platí:
   $((\alpha + \beta)A^T)^T = \alpha A + \beta A$ **[2]**

Náhradní za 5. písemku

1. Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{3\times4}, B \in \mathbb{R}^{4\times1}, C \in \mathbb{R}^{1\times3}, D \in \mathbb{R}^{3\times4}$. Rozhodněte, které z následujících součinů jsou definovány a u těch, které definovány jsou, určete velikost výsledné matice:

   $ABCD,\quad CDBA,\quad D^TC^TB^TA^T,\quad AD^T,\quad A^TD^T,\quad AA^TAA^TA.$ **[2]**

2. Spočtěte:

   (a) $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **[2]**

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & - \\ -4 & -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **[2]**

Náhradní za 6. písemku

1. Najděte matici X tak, aby platilo:

$$\begin{pmatrix} 9 & -42 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ -7 & 33 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ **[2]**

2. Najděte inverzní matici k:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ **[2]**

Náhradní za 7. písemku

1. Dokažte, že množina $\{0, 1, 2, 4\}$ spolu s operací sčítání modulo 5 a neutrálním prvkem 0 není grupa. Také dokažte, že množina nezáporných celých čísel spolu s operací sčítání a neutrálním prvkem 0 není grupa. **[1]**

2. Nad $\mathbb{Z}_2$ najděte všechna řešení soustav určených následujícími maticemi:

(a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **[1]**

(b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ **[1]**

3. Rozhodněte, nad kterými z těles $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$ a $\mathbb{R}$ je následující matice regulární (neboli má lineárně nezávislé řádky):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ **[2]**

Náhradní za 8. písemku

1. Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte všechny matice $X \in \mathbb{Z}_5^{4\times 4}$ splňující následující rovnost (dejte si pozor na to, že X nemusí být invertovatelná):
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$
[2]

2. V tělese komplexních čísel invertujte matici. Prvky výsledné matice uvádějte ve tvaru $a + bi$ s $a, b \in \mathbb{R}$.
$$\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$$
[2]

Náhradní za 9. písemku

1. Uvažujme vektory
$$A = (1, -1, -2, 1)^T, B = (-2, 4, 1, 4)^T, C = (4, 1, 2, -1)^T aD = (-2, 1, 3, -6)^T$$
jako prvky vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Vyjádřete každý z
$$E = (1, 14, 8, 5)^T, F = (7, 4, 2, -1)^T, G = (-6, 17, 8, 5)^T aH = (0, 12, 2, 17)^T$$
jako lineární kombinaci vektorů A, B, C a D. **[4]**

Náhradní za 10. písemku

1. Pro každý z prostorů $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{Z}_3^4$ určete, zdali je v nich následující množina vektorů nezávislá. V těch prostorech, kde nejsou, najděte **všechny** lineární kombinace těchto vektorů, jejichž výsledkem je nulový vektor.
$X = \{(1, 2, 1)^T, (2, 0, 0)^T, (1, 2, 0)^T, (2, 1, 1)^T\}$. **[2]**

2. Pro libovolné pevně zvolené přirozené číslo $k \geq 1$ a těleso T uvažujme k-tici lineárně nezávislých vektorů $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ z T^k. Nechť u je lineární kombinace $v_1, \ldots v_k$ se všemi koeficienty nenulovými, tj. $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_k v_k$, kde $a_i \neq 0$ pro každé i. Dokažte, že každá k-tice z množiny vektorů $V \cup \{u\}$ je lineárně nezávislá. **[2]**

Náhradní za 11. písemku

1. V prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ nejprve najděte největší možnou lineárně nezávislou podmnožinu zadané množiny vektorů. Poté tuto podmnožinu doplňte na bázi (tj. čtveřici lineárně nezávislých vektorů).

   (a) $Y = \{(1, 1, 1, 1)^T, (4, 3, 2, 1)^T, (2, 1, 0, 6)^T, (5, 4, 1, 2)^T, (2, 0, 3, 3)^T, (1, 1, 6, 1)^T\}$ **[2]**

   (b) $Z = \{(0, 1, 0, 1)^T, (0, 2, 0, 2)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (4, 2, 2, 6)^T\}$. **[1]**