Příklady řešené na cvičení LA I - ZS 2012/13

Zdrojem většiny příkladů je sbírka úloh `http://kam.mff.cuni.cz/~sbirka/`

1. cvičení (2.10.2012)

1. Vyřešte soustavu rovnic s parametrem $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + (t-1)y &= 1 \\ (t+1)x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

2. Zapište přímky procházející následujícími dvojicemi bodů ve tvaru $rx + sy = 1$:
   (a) $(1, 2)$ a $(5, 8)$
   (b) $(-3, 0)$ a $(2, 3)$
   (c) $(1, -1)$ a $(2, 2)$

3. Zapište kružnici procházející trojicí bodů $(2, 1)$, $(4, 3)$ a $(0, 7)$ ve tvaru $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

2. cvičení (9.10.2012)

1. Ukažte, že elementární úpravy:
   – záměna dvou rovnic a
   – přičtení t-násobku j-té rovnice k i-té
   se dají provést pomocí elementárních úprav:
   – vynásobení i-té rovnice nenulovým číslem t
   – přičtení j-té rovnice k i-té

2. Převeďte na odstupňovaný tvar
   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$
   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 13 & 18 \\ 6 & -9 & 7 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
   (c)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

3. cvičení (16.10.2012)

1. Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic:

   (a)

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+\ x_3 &= \ \ 5\\ 2x_1+3x_2+\ x_3 &= \ \ 1\\ 2x_1+\ x_2+3x_3 &= 11\\ 5x_1+5x_2+2x_3 &= \ \ 6 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} -x_1+x_2+3x_3 \qquad\quad &= -2\\ 2x_1-x_2-6x_3+\ x_4 &= \ \ \ 2\\ -x_1+x_2+4x_3 \qquad\quad &= -2\\ x_2+2x_3+2x_4 &= \ \ \ 0 \end{aligned}$$

2. Řešte soustavy rovnic $Ax = 0$, $Ax = b_1$, $Ax = b_2$ a $Ax = b_3$ pro:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 5\\ 4\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}$$

4. cvičení (23.10.2012)

1. Dokažte, že platí-li $Ax = Ay$, pak pro vektory x' a y' splňující $x' - y' = x - y$ platí $Ax' = Ay'$.

2. Dokažte, že

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

5. cvičení (30.10.2012)

1. Spočítejte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Dokažte, že pro invertovatelnou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a libovolné $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

3. Najděte inverzní matici k matici odpovídající elementární úpravě prohození dvou řádků (na diagonále jsou pouze dvě 0 a jinak samé 1; mimo diagonálu jsou samé 0 až na dvě 1)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. cvičení (6.11.2012)

1. Dokažte, že pro každou dvojici matic $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

$$\mathrm{St}(AB) = \mathrm{St}(BA),$$

kde $\mathrm{St}(M)$ je stopa matice M definovaná jako:

$$\mathrm{St}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}.$$

2. Najděte dvojici matic $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ splňující

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (AB)_{ij} \neq \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (BA)_{ij}$$

3. Rozhodněte, zda následující matice jsou invertovatelné a pokud ano, spočítejte inverzní matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je invertovatelná. Z toho vyplývá, že i A^T je invertovatelná. Čemu se rovná $(AA^T)^{-1}$?

5. Spočitejte A^{-1} a s její pomocí vyřešte soustavy $Ax = b_i$, $Ax = b_{ii}$, $\ldots Ax = b_{iv}$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad b_{ii} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_{iii} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad b_{iv} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7. cvičení (13.11.2012)

1. Rozhodněte, které z následujících trojic (množina, operace, neutrální prvek) jsou grupou:

(a) $(\mathbb{R}, +, 0)$

(b) $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$

(c) $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$

(d) $(\mathbb{Z}, +, 0)$

(e) $(\mathbb{Z}^+, +, 0)$

(f) $(\mathbb{Z}^+, \cdot, 1)$

(g) $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$

(h) $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot, I)$

(i) (invertovatelné (neboli regulární) matice z $\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot, I$)

(j) $(\{0, 1, 2\}, +, 0)$

(k) $(\{0, 1, 2\}, \text{sčítání mod } 2, 0)$

2. Rozhodněte, které z následujících pětic (množina, 1. operace, 2. operace, neutrální prvek pro 1. operaci, neutrální prvek pro 2. operaci) jsou tělesem:

   (a) $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

   (b) $(\{0, 1, \ldots, p-1\}, \text{sčítání mod } 2, \text{násobení mod } 2, 0, 1)$, kde p je prvočíslo

   (c) (regulární matice z $\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), I$)

3. Vyřešte soustavu určenou následující maticí v tělesech $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

8. cvičení (20.11.2012)

1. Najděte všechny matice X, které nad $\mathbb{Z}_5$ splňují:

   (a)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Právě jedno řešení.

   (b)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Žádné řešení.

(c)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: $X = \begin{pmatrix} 2+p & 2-3p & p \\ 2+q & 2-3q & q \\ r-1 & 2-3r & r \end{pmatrix}$

2. V tělese komplexních čísel vyřešte soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= i \\ ix_1 + (1-i)x_2 &= -1 \end{aligned}$$

3. Uvažujme těleso $\mathbb{Z}_8$: Prvky jsou polynomy 0, 1, $a = x$, $b = x + 1$, $c = x^2$, $d = x^2 + 1$, $e = x^2 + x$, $f = x^2 + x + 1$. Při sčítání se koeficienty berou modulo 2. Po vynásobení se vezme zbytek součinu po dělení $x^3 + x + 1$ (tj. odečte se vhodný násobek tohoto polynomu tak, aby výsledný polynom byl stupně nejvýše 2) a koeficienty se vezmou modulo 2.

   Spočítejte: $b + 0$, $b + 1$, $b + a$, $b + b$, $b + c$, $b + d$, $b + e$, $b + f$, $b \cdot d$ a $d \cdot e$.

   Řešení: b, a, 1, 0, f, e, d, c, c a b.

9. cvičení (27.11.2012)

1. Rozhodněte, zda
   (a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$.
   (b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{Z}$.
   (c) $([0, 1), +, \cdot)$, kde se sčítá a násobení skalárem tak, jako v $\mathbb{R}$, ale výsledkem je pouze zlomková část výsledku, je vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

2. Označme symbolem $\mathbb{R}^+$ kladná reálná čísla a definujme operace $\oplus$ na $\mathbb{R}^+$ a $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ následovně:

$$u \oplus v = uv, \qquad a \odot u = u^a$$

   Dokažte, že $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$. Nalezněte izomorfismus mezi $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, kde + a $\cdot$ jsou standardní sčítání a násobení reálných čísel.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ zapište vektor $(-7, 12, 2, -4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(-5, 5, 1, -1)^T$, $(2, -5, 0, 2)^T$, $(3, 2, 0, -2)^T$ a $(2, -3, 1, 1)^T$.

10. cvičení (4.12.2012)

1. Dokažte, že množina komplexních čísel$\mathbb{C}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, který je izomorfní $\mathbb{R}^2$. Co naopak $\mathbb{C}$ (už je neuvažujeme pouze jako vektorový prostor) od $\mathbb{R}^2$ odlišuje?

2. Dokažte, že počet vektorů, které se dají zapsat jako lineární kombinace k-tice pevně zvolených lineárně nezávislých vektorů z vekt. prostoru nad Z_p je p^k.

   Pozn.: odsud lze dokázat, že pro $p > \binom{n+k-1}{n-1}$ existuje $n+k$ vektorů v Z_p^n takových, že žádný z nich nelze zapsat jako lineární kombinaci $(n-1)$-ice z ostatních vektorů.

3. Vezměme libovolné konečné těleso $Z_q = \{0, 1, a_1, \ldots, a_{q-2}\}$. Dokažte, že nad Z_q^{q-1} každá $(q-1)$-tice z následujících $q+1$ vektorů je lineárně nezávislá. (Nebo ekvivalentně řečeno: žádný z následujících $q+1$ vektorů nelze zapsat jako lineární kombinaci $(q-2)$-ice z ostatních).
   Vektory $u_1, \ldots u_{q-1}$ jsou řádky jednotkové matice (u_i má jedničku na pozici i a jinde nuly).
   Vektor $u_q = (1, 1, 1, \ldots, 1)$.
   Vektor $u_{q+1} = (1, a_1, a_2, \ldots, a_{q-2})$.

11. cvičení (11.12.2012)

1. Dokažte, že následující tvrzení **neplatí**: Množina vektorů $u_1, \ldots, u_k$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každé u_i lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

   Jak poznáme, která u_i jdou vyjádřit jako lin. komb. ostatních?

2. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového tělesa V nad reálnými čísly. Rozhodněte, které z následujících množin jsou lin. nezávislé:

   (a) $\{u, u+v, u+w\}$
   (b) $\{u+v, u-v, u+w, u-w\}$
   (c) $\{u, 2u, w\}$
   (d) $\{u-2v+w, 3u+v-2w, 7u+14v-13w\}$

3. Doplňte množinu $M = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ na bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

12. cvičení (18.12.2012)

1. Doplňte množinu $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$ na bázi vektorového prostoru polynomů stupně nejvýše tři.

2. Pro každé těleso T a každé přirozené číslo $k \geq 1$ dokažte, že všechny vektorové prostory dimenze k nad T jsou navzájem izomorfní.

3. V prostoru $\mathbb{R}^2$ určete souřadnice vektoru $(2,1)^T$ vzhledem k bázi $\{(8,2)^T, (7,3)^T\}$.