10. Písemka z LA II - 3.5.2013
Varianta A

1. Nechť

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Určete **vlastní čísla** matice A a ke každému vlastnímu číslu určete alespoň jeden příslušný **vlastní vektor** nad tělesem $\mathbb{R}$. Můžete bez důkazu využít toho, že jedno z vlastních čísel je 1 (to je díky tomu, že součet řádků je vektor se samými jedničkami). Pak můžete využít toho, že součin vlastních čísel je determinant a jejich součet je součet prvků na diagonále. **[2]**

   (b) **Diagonalizujte** matici A. Napište A jako součin matic SDS^{-1}, kde D má na diagonále vlastní čísla matice A a jinde nuly a pro každé i je i-tým sloupcem matice S libovolný vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu napsanému na pozici $D_{i,i}$. **[2]**

   (c) Spočtěte mocninu D^n pro obecné $n \in \mathbb{N}$. Poté určete $D^\infty = \lim_{n\to\infty} D^n$, jejímiž prvky jsou $(D^\infty)_{i,j} = \lim_{n\to\infty}(D^n)_{i,j}$. Nakonec spočtěte $A^\infty = SD^\infty S^{-1}$. **[2]**

10. Písemka z LA II - 3.5.2013
Varianta B

1. Nechť

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Určete **vlastní čísla** matice A a ke každému vlastnímu číslu určete alespoň jeden příslušný **vlastní vektor** nad tělesem $\mathbb{R}$. Můžete bez důkazu využít toho, že jedno z vlastních čísel je 1 (to je díky tomu, že součet řádků je vektor se samými jedničkami). Pak můžete využít toho, že součin vlastních čísel je determinant a jejich součet je součet prvků na diagonále. **[2]**

(b) **Diagonalizujte** matici A. Napište A jako součin matic SDS^{-1}, kde D má na diagonále vlastní čísla matice A a jinde nuly a pro každé i je i-tým sloupcem matice S libovolný vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu napsanému na pozici $D_{i,i}$. **[2]**

(c) Spočtěte mocninu D^n pro obecné $n \in \mathbb{N}$. Poté určete $D^\infty = \lim_{n\to\infty} D^n$, jejímiž prvky jsou $(D^\infty)_{i,j} = \lim_{n\to\infty}(D^n)_{i,j}$. Nakonec spočtěte $A^\infty = SD^\infty S^{-1}$. **[2]**