

3. Písemka z LA II - 15.3.2013

Varianta A

1. Uvažujme bázi $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Souřadnicemi vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ vůči bázi U je n -tice čísel $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ splňující $v = \hat{v}_1 u_1 + \hat{v}_2 u_2 + \dots + \hat{v}_n u_n$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou U , pokud:

	Každé $v \in \mathbb{R}^n$ má jednoznačně určené souřadnice.	Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ se souřadnice určí jako $\hat{v}_i = \langle v, u_i \rangle$ pro každé $1 \leq i \leq n$.
U je obyčejná báze		
U je ortogonální		
U je ortonormální		

[1]

2. Necht

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

- (a) Určete, zda jsou **sloupce** matice A lineárně nezávislé. Najděte ortonormální bázi jejího **sloupcového** prostoru a vytvořte matici $\bar{A}$, jejímiž sloupci jsou vektory této ortonormální báze. [2]
- (b) Udělejte projekci vektoru b do sloupcového prostoru matice $\bar{A}$. (Tím najdete co nejpřesnější řešení soustavy $\bar{A}x = b$. Tedy $\bar{b}$ vyjádřitelné jako $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$ pro nějaké $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ takové, že $\|\bar{b} - b\|$ je nejmenší možné.) [2]
- (c) Změní se výsledek předchozí části, pokud budeme dělat projekci vektoru b do sloupcového prostoru matice A namísto matice $\bar{A}$? Své tvrzení zdůvodněte. [1]

3. Písemka z LA II - 15.3.2013

Varianta B

1. Uvažujme bázi $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Souřadnicemi vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ vůči bázi U je n -tice čísel $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ splňující $v = \hat{v}_1 u_1 + \hat{v}_2 u_2 + \dots + \hat{v}_n u_n$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou U , pokud:

	Každé $v \in \mathbb{R}^n$ má jednoznačně určené souřadnice.	Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ se souřadnice určí jako $\hat{v}_i = \langle v, u_i \rangle$ pro každé $1 \leq i \leq n$.
U je obyčejná báze		
U je ortogonální		
U je ortonormální		

[1]

2. Necht

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

- (a) Určete, zda jsou **sloupce** matice A lineárně nezávislé. Najděte ortonormální bázi jejího **sloupcového** prostoru a vytvořte matici $\bar{A}$, jejímiž sloupci jsou vektory této ortonormální báze. [2]
- (b) Udělejte projekci vektoru b do sloupcového prostoru matice $\bar{A}$. (Tím najdete co nejpřesnější řešení soustavy $\bar{A}x = b$. Tedy $\bar{b}$ vyjádřitelné jako $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$ pro nějaké $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ takové, že $\|\bar{b} - b\|$ je nejmenší možné.) [2]
- (c) Změní se výsledek předchozí části, pokud budeme dělat projekci vektoru b do sloupcového prostoru matice A namísto matice $\bar{A}$? Své tvrzení zdůvodněte. [1]