Náhradní DÚ z Lineární Algebry II

Pravidla: Za každou úlohu lze získat pouze plný počet bodů nebo nic. Dokud bude v řešení chyba, budu ho vracet, dokud nebude celé dobře. Výjimkou jsou drobné chyby v závěru výpočtu. Drobné chyby uprostřed výpočtu budu ale vracet k opravení - často způsobí významné zjednodušení (nebo ztížení) zbytku výpočtu.

Za každou písemku plus její náhradní domácí úlohy lze v součtu získat maximálně 6 bodů. Body nad tuto hranici se nepočítají. **Změna oproti minulému semestru:** Náhradní úkoly za stejnotematické písemky jsou sloučeny (jako třeba u 2. a 3. písemky). V tom případě lze za tyto písemky plus náhradní úlohy dohromady získat až $6k$ bodů, kde k je počet sloučených písemek.

Náhradní za 1. písemku

1. Nechť $x_1 = (2, 0, -1, 1)$, $x_2 = (1, 2, 1, 1)$, $x_3 = (1, -3, 1, 1)$, $x_4 = (1, -2, 0, -1)$. V $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem určete následující.

   (a) Skalární součiny $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, $\langle x_1, x_4\rangle$, $\langle x_1 + x_3, x_2\rangle$, $\langle x_2 + x_1 + x_4, x_2 + x_1\rangle$ a euklidovskou normu vektoru $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. **[2]**

   (b) Kosinus úhlu mezi vektorem $x_1 - x_2$ a vektorem $x_4 - x_2$. **[1]**

   (c) Vzdálenost mezi bodem x_1 a přímkou procházející body x_2 a x_4. **[2]**

Náhradní za 2. a 3. písemku

1. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = (10, 5, 13, 9)^T$$

   (a) Najděte libovolnou ortonormální bázi **sloupcového** prostoru matice A. **[1]**

   (b) Určete, zda jsou **řádky** matice A lineárně nezávislé. Poté najděte dvě ortonormální báze jejího řádkového prostoru tak, aby žádný vektor první báze nebyl kolmý na žádný vektor druhé báze. **[2]**

   (c) Jednu ortonormální bázi řádkového prostoru matice A doplňte na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^4$. **[1]**

   (d) Udělejte projekci vektoru b do řádkového prostoru matice A. Poté rozložte b na součet $b' + \bar{b}$, kde b' patří do řádkového prostoru matice A a $\bar{b}$ je vektor na tento prostor kolmý. Určete vzdálenost vektoru b od řádkového prostoru matice A (tj. euklidovskou vzdálenost od b k vektoru z řádkového prostoru matice A, který je k b nejblíže). **[2]**

Náhradní za 4. písemku

1. Uvažujme prostor reálných funkcí na intervalu $[-1, 1]$, kde skalární součin funkcí f a g je $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. V něm vezměme funkce $f(x) = \sin(x)$ a $g(x) = \cos^2(x)$. Dokažte, že f a g jsou na sebe v tomto prostoru kolmé. **[1]**

2. Spočtěte následující determinanty.

   (a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 157 & 207 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **[3]**

Náhradní za 5. písemku

1. U každé z permutací p, q a r určete počet inverzí, znaménko a inverzní permutaci. Poté sestrojte $p \circ q \circ r$ a určete její znaménko.
   $p = (4, 3, 1, 2, 6, 5)$, $q = (3, 5, 2, 6, 1, 4)$, $r = (1, 4, 3, 2, 5, 6)$ **[2]**

Náhradní za 6. písemku

1. Spočtěte determinant $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$ **[2]**

2. Určete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $u = (1, 2, -1)$, $v = (-1, 2, 3)$ a $w = (0, 5, -2)$. Jedná se o útvar obahující body vyjádřitelné jako $\alpha u + \beta v + \gamma w$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$. **[1]**

Náhradní za 7.-11. písemku

1. Řešte nad tělesem $\mathbb{C}$. Pro každou z následujících matic nalezněte vlastní čísla a ke každému vlastnímu číslu všechny odpovídající vlastní vektory.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

[3]

2. Řešte nad tělesem $\mathbb{C}$. Pro každou z následujících matic nalezněte vlastní čísla a ke každému vlastnímu číslu všechny odpovídající vlastní vektory.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

[**4**]

3. Určete vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

[**1**]

4. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Diagonalizujte matici A. Tj. najděte diagonální matici D a regulární matici S splňující $A = SDS^{-1}$. Spočtěte i S^{-1}. [**2**]

   (b) To samé pro matici B. [**2**]

   (c) Spočtěte **třetí** mocninu a druhou odmocninu matice A. [**2**]

   (d) To samé pro matici B. [**2**]

Náhradní za 12. písemku

1. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -6 & 2 \\ -1 & -6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   Najděte Choleského rozklad matice A a s jeho pomocí vyřešte soustavu $Ax = b$. [**2**]

2. Vymyslete **symetrickou** matici velikosti 4×4 takovou, aby měla na všech svých políčcích kladná čísla a aby **nebyla** pozitivně definitní. To, že není pozitivně definitní, dokažte. [**1**]