Příklady řešené na cvičení LA II - LS 2012/13

Zdrojem většiny příkladů je sbírka úloh `http://kam.mff.cuni.cz/~sbirka/`

1. cvičení (22.2.2013)

1. Rozhodněte, které z následujících operací jsou skalárním součinem dvojice vektorů $x = (x_1, x_2)^T$ a $y = (y_1, y_2)^T$ z $\mathbb{R}^2$.

   (a) $\langle x, y\rangle := x_1y_2 + x_2y_1$

   (b) $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

   (c) $\langle x, y\rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

2. Pro standardní skalární součin $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i\overline{y_i}$ a euklidovskou normu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ nad $\mathbb{C}^d$, resp $\mathbb{R}^d$ určete u následujících dvojic vektorů x a y:

   I) skalární součin vektorů x a y

   II) euklidovské normy vektorů x a y

   III) vzdálenost mezi body x a y (tj. $\|x - y\|$)

   IV) zdali jsou vektory x a y navzájem kolmé (tj. zda $\langle x, y\rangle = 0$).

   a) $x^T = (4, 2, 3)$, $y^T = (1, 5, -2)$.

   b) $x^T = (3, 1, -2)$, $y^T = (1, -3, 2)$.

   c) $x^T = (2, -1, 4)$, $y^T = (5, 2, -2)$.

   d) $x^T = (2, 1, 4, -1)$, $y^T = (4, -1, 0, 2)$.

   e) $x^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $y^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

2. cvičení (1.3.2013)

1. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_iy_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{z^{(1)}, \dots, z^{(r)}\}$ řádkového prostoru následujích matic.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   Výsledek: $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Výsledek: $Z = \{(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T, (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T\}$.

2. Rozšiřte ortonormální báze z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

   Výsledky: (a) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ a (b) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

3. cvičení (8.3.2013)

1. Pro matice z předchozího cvičení určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2,2,1,5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[p]_Z$ vzhledem k bázi Z.

   Výsledky: (a) $[p]_Z = (5,-2,1)^T$, $p = (1,3,2,4)^T$ a

   (b) $[p]_Z = (2,-1,\frac{7\sqrt{2}}{2})^T$, $p = (\frac{7}{2},2,1,\frac{7}{2})^T$.

2. Určete vzdálenost bodu $A = (5,5,3,3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8,-1,1,-2)^T$ a $C = (4,-2,2,-1)^T$.

3. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = (10,5,13,9)^T.$$

4. cvičení (15.3.2013)

1. Uvažujme funkce $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ a $h(x) = 1$ jako prvky prostoru reálných funkcí na intervalu $[0,2\pi]$. Skalární součin funkcí a a b je hodnota $\int_0^{2\pi} a(x)b(x)\mathrm{d}x$.

   (a) Dokažte, že funkce f, g a h jsou v tomto prostoru navzájem kolmé.

   (b) Určete normy $\|f\|$, $\|g\|$ a $\|h\|$.
   Řešení:
   $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x} = \sqrt{\pi}$,
   $\|g\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x} = \sqrt{\pi}$,
   $\|h\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}x} = \sqrt{2\pi}$.

   (c) Udělejte projekci funkce $t(x) = x$ do podprostoru generovaného funkcemi f, g a h.
   Řešení: Ortonormální báze daného podprostoru je:
   $f(x)/\|f\| = \sin(x)/\sqrt{\pi}$, $g(x)/\|g\| = \cos(x)/\sqrt{\pi}$ a $h(x)/\|h\| = 1/\sqrt{2\pi}$.
   Souřadice projekce jsou

$$\left\langle t(x), \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\sin(x) - x\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -2\sqrt{\pi}$$
$$\left\langle t(x), \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\cos(x) + x\sin(x)\right]_0^{2\pi} = 0$$
$$\left\langle t(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2\pi^3}$$

   A tedy projekce je $-2\sin(x) + \pi$.

2. Vypočtěte determinanty následujících matic:

(a) $A = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. cvičení (22.3.2013)

1. Najděte cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutaci pro každou z permutací p a q. Dále určete složení $p \circ q$ těchto permutací a jeho znaménko. (Složení definujeme jako $(p \circ q)(i) = q(p(i))$.)

   $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2), \quad q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$

2. Najděte permutaci na deseti prvcích takovou, že p^n (tj. složení n permutací p) není identita pro žádné n z $1, 2, \ldots, 29$.

3. Pro $p = (8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 7)$ určete p^{387}.

4. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete znaménko permutace $(n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1)$.

6. cvičení (29.3.2013)

1. Rozviňte determinant reálné matice:

   $$X = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$$

   Výsledek: $abcd - ad - bc + 1$.

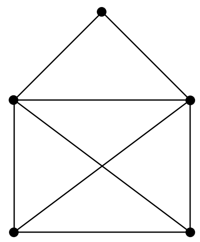
2. Určete determinant následující matice:

   $$T_{n+1} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

   Výsledek: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

3. Spočtěte obsah rovnoběžníka určeného vektory $a = (2, 1)^T$ a $b = (1, 3)^T$. Výsledek určený pomocí determinantu si ověřte i bez použití determinantu (např. pomocí Heronova vzorce, nebo s využitim toho, že jedna úhlopříčka rovnoběžníka má stejnou délku jako jedna hrana).

4. Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Výsledek: 20

5. Pomocí determinantu určete počet koster úplného bipartitního grafu s partitami o velikostech m a n.

Výsledek: $m^{n-1}n^{m-1}$

7. cvičení (5.4.2013)

1. Nad tělesem $\mathbb{R}$ nalezněte vlastní čísla následujících matic a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

   (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Dokažte:

   (a) Je-li λ vlastním číslem matice A a má-li matice A pouze reálné koeficienty, pak je i $\overline{\lambda}$ (číslo komplexně sdružené s λ) vlastním číslem matice A.

8. cvičení (12.4.2013)

1. Dokažte:

   (a) Nula není vlastním číslem matice A právě tehdy, když je A regulární.

   (b) Je-li λ vlastním číslem matice A a x vlastním vektorem příslušným λ, pak $1/\lambda$ je vlastním číslem matice A^{-1} a x vlastním vektorem příslušným $1/\lambda$. Dále dokažte, že je-li $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ množina všech vlastních čísel A, pak $\{\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\}$ je právě množina všech vlastních čísel A^{-1}.

   (c) Je-li p polynom, λ vlastní číslem matice A a x vlastní vektor příslušný λ, pak $p(\lambda)$ je vlastním číslem matice $p(A)$ a x vlastním vektorem příslušným $p(\lambda)$. Dokonce platí (dá se dokázat pomocí Jordanova tvaru), že je-li $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ množina všech vlastních čísel A, pak $\{p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)\}$ je právě množina všech vlastních čísel $p(A)$. Odsud pak plyne, že matice $p_A(A)$, kde p_A je charakteristický polynom matice A, má všechna vlastní čísla nulová.

2. Najděte příklad matice, která má pouze nulová vlastní čísla, ale není to nulová matice.

Výsledek: např. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

3. Nad tělesem $\mathbb{C}$ nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Výsledek: Jediné (trojnásobné) vlastní číslo 1 a vlastními vektory jsou všechny vektory tvaru $t \cdot (1, 1, -1)$, kde $t \in \mathbb{C}$.

4. Tři z vlastních čísel matice A jsou 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

9. cvičení (19.4.2013)

1. Nechť
$$A = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$
   (a) Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Zdůvodněte, proč je tato matice diagonalizovatelná.

   (b) Diagonalizujte matici A. Tedy najděte diagonální matici D a regulární matici S tak, aby platilo $AS = SD$, neboli $A = SDS^{-1}$. (D má na diagonále vlastní čísla a sloupce S jsou příslušné lineárně nezávislé vlastní vektory)

   (c) Spočtěte druhou mocninu a jednu z druhých odmocnin matice A. (Odmocnina A je matice B splňující $B \cdot B = A$.)

2. Rozhodněte, zda jsou matice A a B podobné.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Postup: Nejprve ověříme, že A a B mají stejný charakteristický polynom. Toto ještě nemusí znamenat, že si jsou matice podobné! Určíme, že všechna vlastní čísla jsou rovna 1. Poté určíme, že geometrická násobnost vlastního čísla 1 je u obou matic různá, a proto si podobné nejsou.

10. cvičení (26.4.2013)

1. Dokažte, že $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nemá druhou odmocninu.

2. Nechť A_k je matice s $k-1$ jedničkami těsně nad diagonálou. Tj. na pozici (i, j) je jednička tehdy, když $j = i + 1$, a jinak nula. Určete mocniny A_k: A_k^2, A_k^3 ... a obecně A_k^n.

   Jedno možné řešení: Uvažujte A_k jako matici sousednosti orientovaného grafu. Tím grafem je orientovaná cesta na k vrcholech. Na pozici (i, j) v A_k^n pak je počet cest z i do j délky přesně n. A to se pro tento graf určuje snadno.

3. **Markovovy řetězce:** Na začátku pozorování je ve městě, na venkově i na předměstí milion lidí. Migrace obyvatel město → předměstí → venkov probíhá následovně. Každých deset let:

z města:	70% zůstane, 10% na venkov, 20% na předměstí,
z venkova:	20% do města, 60% zůstane, 20% na předměstí,
z předměstí:	10% do města, 10% na venkov, 80% zůstane.

Nejprve předpokládejte, že se po nějaké době stav ustálí. Jak bude vypadat toto limitní rozložení?

Řešení: Sestavíme matici přechodu (řádek = kam, sloupec = odkud)

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

a vektor počátečních stavů: $x_0 = 1000000 \cdot (1,1,1)^T$. Potom $A^n x_0$ je vektor stavů po n desetiletích. My hledáme vektor x_∞ splňující "stabilitu": $Ax_\infty = x_\infty$. Jedná se tedy o vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu 1. A to ten z nich, který má součet složek 3000000.
Výsledek: $x_\infty = (900000, 600000, 1500000)^T$.

4. Dokažte, že matice přechodu Markovova procesu (tj. matice s nezápornými koeficienty, kde součet hodnot v každém sloupci je 1) má vlastní číslo 1.

11. cvičení (3.5.2013)

1. Uvažujme matici A a vektor x z příkladu **??** z minula. Ukážeme, k jakému rozložení bude konvergovat vektor počtu lidí ve městě, na venkově a na předměstí.

   (a) Diagonalizujte matici A.
   Výsledek:

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   (b) Spočtěte $D^\infty = \lim_{n\to\infty} D^n$.
   Výsledek:

$$D^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) Spočtěte $A^\infty = \lim_{n\to\infty} A^n = SD^\infty S^{-1}$.
   Výsledek:

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 3/10 & 3/10 & 3/10 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   (d) Spočtěte $x_\infty = A^\infty x$.
   Výsledek: $x_\infty = (900000, 600000, 1500000)^T$, stejně, jako minule.

12. cvičení (10.5.2013)

1. Rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní a pokud ne, zda je alespoň pozitivně semidefinitní.

   (a) I_n (jednotková matice)

   (b) O_n (matice se samými nulami)

2. Nalezněte Choleského rozklad následující matice, nebo zjistěte, že není pozitivně definitní.
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   Řešení: $A = LL^T$, kde
   $L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

   Řešení: $b = Ax = LL^T x$, kde
   $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
   Soustava $Ly = b$ má řešení $y = (10, 1, -2, 3, 2)^T$, výsledek je tedy řešením soustavy $L^T x = y$, což je $x = (1, 1, -2, 0, 1)^T$. .

13. cvičení (17.5.2013)

1. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   je matice bilineární formy na K^3. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Pokud to lze, najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu. (Vše vůči stejné bázi.)

   (a) Řešte pro $K = \mathbb{R}$.

   (b) Řešte pro $K = \mathbb{Z}_2$ (číslo 2 v $\mathbb{Z}_2$ odpovídá 0).

   (c) Řešte pro $K = \mathbb{Z}_3$.

2. Rozhodněte, zdali platí, že $g(u) > 0$ pro všechna netriviální $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$g(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2.$$

Vyjádřete $g(u)$ v následujícím tvaru, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$g(u) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)^2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)^2.$$

Řešení (doplění toho, co se nestihlo na cvičení): Kladnost $g(u)$ plyne z pozitivní definitnosti matice zadané kvadratické formy. Hledáme bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, aby matice kvadratické formy g vzhledem k B byla jednotková matice I_3. Provedeme Choleského rozklad matice A, čímž dostaneme $A = LL^T = (L^T)^T I_3 L^T$. Protože A je matice kvadratické formy g vzhledem ke kanonické bázi, je L^T maticí přechodu od kanonické báze k bázi B. Provedením Choleského rozkladu dostaneme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Nechť y_1, y_2, y_3 jsou vektory báze B. Ty spočítáme jako $y_i = L^T \cdot (x_1, x_2, x_3)^T$. Vidíme tedy, že y_i je (x_1, x_2, x_3) krát i-tý sloupec matice L. Díky tomu, že maticí g vzhledem k bázi B je I_3, tak platí $g(u) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, a tedy máme

$$g(u) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (\sqrt{3}x_3)^2.$$