# 1. písemka z Kombinatoriky a grafů 30.3.2011

*Vše, co tvrdíte, zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a ze cvičení, vždy ale napište znění takového tvrzení. Můžete používat $\check{s}(n)$ pro počet permutací bez pevného bodu, $s(n,m)$ pro počet surjektivních funkcí z $n$-bodové množiny do $m$-bodové a $F_n$ pro $n$-té Fibonacciho číslo a tyto hodnoty nemusíte dále rozepisovat. Nepoužívejte zápisky, učebnice ani kalkulačky. V případě nejasnosti v zadání se neváhejte zeptat.*

1. Rozhodněte, zda

   (a) pro každou trojici přirozených čísel $n, m, k \geq 1$ splňující $n \geq m$ platí

   $$\binom{n+k}{m} \geq \binom{n}{m},$$

   (b) pro každou trojici přirozených čísel $n, m, k \geq 1$ splňující $n \geq m+k$ platí

   $$\binom{n}{m+k} \geq \binom{n}{m}.$$

   [5 bodů]

2. Kolik je na $n$-prvkové množině permutací s nejvýše dvěma pevnými body? [4 body]

3. Najděte vzorec pro $n$-tý člen posloupnosti zadané rekurencí:

   $$a_0 = 2, \qquad a_1 = 4, \qquad \forall n \geq 2: \; a_n = a_{n-1}a_{n-2}^2$$

   [6 bodů]

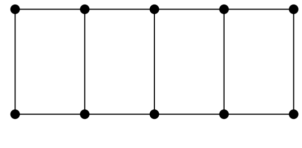
4. Pro následující funkci $f$ napište posloupnost, pro niž je $f$ vytvořující funkcí.

   $$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

   [4 body]

---

**Bonusová úloha:** Určete počet koster žebříku $Z_{2n}$, což je graf, který vznikne ze dvou cest na $n$ vrcholech spojením dvojic odpovídajících si vrcholů hranami. Viz $Z_{10}$ na obrázku.



Obrázek 1: Žebřík $Z_{10}$

[8 bodů]