

Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů - stav z 29. května 2011

Všechna svá tvrzení řádně zdůvodněte, a to i v případě, že to u úlohy není výslovně uvedeno. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a cvičení, vždy ale napište znění tvrzení, které používáte.

I) Rychlost růstu funkcí - Náhradní za úlohu 1 1. písemky

1. Rozhodněte, zda pro každou dvojici přirozených čísel $k, n \geq 1$ platí

$$(kn)! \geq (k!)^n$$

a zda platí

$$(k!)^n \geq n^k.$$

[2]

2. Dokažte, že:

(a) Pro každé přirozené číslo m je součin všech prvočísel mezi $m + 1$ a $2m$ nejvýše $(2m)!/(m!)^2$. [3]

(b)

$$\forall l \geq 0 : \prod_{i=1}^{i=l} \binom{2^i}{2^{i-1}} \leq 2^{2^{l+1}}.$$

[2]

(c) Součin všech prvočísel mezi 1 a m je nejvýše 2^{4m} . Můžete použít výsledků předchozích dvou částí této úlohy, a to i v případě, že je nemáte dokázané. [2]

3. Rozhodněte, zda pro každou dvojici přirozených čísel $k, n \geq 1$ splňující $n \geq 3k$ platí

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq 2 \binom{n}{k}.$$

[2]

II) Kombinatorické počítání - Náhradní za úlohu 2 1. písemky

4. Kolik je pro dané $n \geq 1$ permutací množiny čísel $\{1, 2, \dots, 2n + 1\}$, kde se každé sudé číslo zobrazí na nějaké liché číslo. [2]

5. Špión získal následující informace o nepřátelské hvězdné lodi: Posádka má 40 členů, z nichž každý ovládá alespoň jeden z jazyků klingonština, romulanština a vagonština, přičemž někteří ovládají více než jeden jazyk. Klingonsky umí 30 z nich, romulansky 20 a vogonsky 15; klingonsky a zároveň romulansky 16; klingonsky a zároveň vogonsky 5; vogonsky a zároveň romulansky 10.

Rozhodněte, zda tyto informace mohou být pravdivé. Pokud ano, pak určete, kolik členů posádky ovládá všechny tři jazyky zároveň. [2]

6. Kolik čísel z $\{1, 2, \dots, 1000\}$ není dělitelných žádným z čísel 6, 22, 36, 101? [2]

III) Řešení rekurencí - Náhradní za úlohu 3 1. písemky

7. Najděte explicitní vzorec pro n -tý člen posloupnosti zadané rekurencí

(a)

$$a_0 = 3 \quad a_n = 2a_{n-1} + 3 \text{ pro } n \geq 1$$

[2]

(b)

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

[2]

(c)

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

[2]

8. Najděte explicitní vzorec pro počet posloupností délky n tvořených písmeny a, b, c, d , ve kterých se a a b nevyskytují těsně vedle sebe. [4]

IV) Vytvořující funkce - Náhradní za úlohu 4 1. písemky

9. Najděte vytvořující funkce následujících posloupností:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8 \dots \quad (\text{tj. } a_n = (-1)^n(n+1))$$

$$2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 \dots \quad (\text{tj. } a_n = 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}) \quad [2]$$

10. Pro každou z následujících funkcí napište vzorec pro n -tý člen posloupnosti, jejíž je vytvořující funkcí.

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 + x - 2} \quad f_2(x) = \frac{7x}{32 - x^5}$$

[2]

V) Catalanova a Fibonacciho čísla - Náhradní za úlohu 1 2. písemky

11. Dokažte, že Fibonacciho čísla splňují následující rovnost:

$$\forall n \geq 2 : F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

[3]

12. Pro každou dvojici přirozených čísel n, k splňující $n \geq k \geq 0$ definujme $c_{n,k}$ jako

$$c_{n,0} = 1 \quad \text{pro každé } n \geq 0$$

$$c_{n,n} = c_{n,n-1} \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

$$c_{n,k} = c_{n,k-1} + c_{n-1,k} \quad \text{pro každé } n > k \geq 1.$$

Dokažte, že pro každé n je $c_{n,n}$ rovno Catalanovu číslu C_n . (Může pomoci interpretovat $c_{n,k}$ jako počet jistých cest v mřížce, nebo dokázat, že $c_{n,k} = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k}{n+1}$). [2]

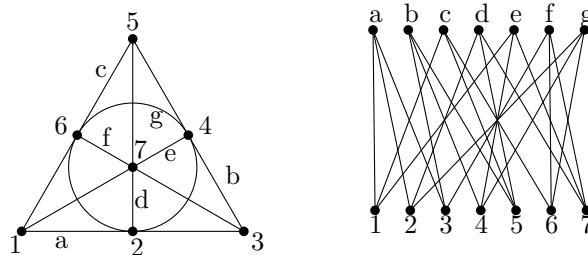
13. Určete počet permutací π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ takových, že pro žádnou trojici pozic i, j, k splňující $0 < i < j < k \leq n$ neplatí $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Např. permutace 2, 4, 5, 3, 1 se nepočítá kvůli trojici $i = 1, j = 3$ a $k = 4$, protože $2 < 3 < 5$. [4]
14. Určete počet perfektních párování žebříku Z_{2n} , což je graf, který vznikne ze dvou n -vrcholových cest $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ spojením dvojic vrcholů u_i, v_i hranami (viz obrázek v 1. písemce). [2]

VI) Konečné projektivní roviny - Náhradní za úlohu 2 2. písemky

15. Pro množinový systém (P, \mathcal{L}) , kde $P \neq \emptyset, \mathcal{L} \neq \emptyset$ a každá $L \in \mathcal{L}$ je podmnožinou P , definujeme podmínky:
- (P1) každá dvojice různých přímek $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ má společný právě jeden bod z P ,
 - (P2) pro každou dvojici různých bodů $p_1, p_2 \in P$ existuje právě jedna $L \in \mathcal{L}$ obsahující p_1 i p_2 ,
 - (P0) existuje čtveřice $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ taková, že žádné tři z bodů této čtveřice neleží na společné přímce,
 - (P0') existuje kladné číslo r takové, že každá přímka obsahuje právě r bodů a každým bodem prochází právě r přímek.

Najděte všechny systémy (P, \mathcal{L}) splňující (P1), (P2) a (P0'), ale ne (P0). Může nějaký systém (P, \mathcal{L}) splňovat (P1), (P2) a (P0), ale ne (P0')? [2]

16. Matice obsahující hodnoty pouze 0 a 1 se nazývá $(0, 1)$ -matice. Čtvercem v $(0, 1)$ -matici $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ budeme nazývat dvojici řádků r, s a dvojici sloupců c, d takových, že $a_{r,c} = a_{r,d} = a_{s,c} = a_{s,d} = 1$. Dokažte, že pro nekonečně mnoho hodnot n platí, že počet $n \times n$ $(0, 1)$ -matic, které neobsahují žádný čtverec, je alespoň $2^{n\sqrt{n}}$. [2]
17. Dokažte, že obvod grafu incidence každé konečné projektivní roviny je 6. Obvod grafu je délka nejkratší kružnice. Graf incidence je bipartitní graf, kde partity jsou množina bodů a množina přímek. V grafu je mezi bodem a přímkou hrana právě tehdy, když bod leží na přímce (viz obrázek Fanovy roviny a jejího grafu incidence). [2]



VII) Toky a stupeň souvislosti grafu - Náhradní za úlohu 3 2. písemky

18. Pro každé $n \geq 3$ určete vrcholovou souvislost grafu vzniklého odstraněním hran libovolné hamiltonovské kružnice z úplného grafu. [2]

19. Mějme 3-regulární graf G . Dokažte že G je hranově 2-souvislý právě tehdy, když je vrcholově 2-souvislý. [2]
20. Nechť G je graf (tvaru mřížky 5×5) s vrcholy $V = \{[x, y] : 1 \leq x, y \leq 5\}$ a orientovanými hranami $([x, y], [x, y + 1])$ a $([x, y], [x + 1, y])$ s kapacitami

$$c([x, y], [x', y']) = \frac{1}{\min\{10 - x - y, x + y - 1\}}.$$

Určete velikost maximálního toku ze zdroje $[1, 1]$ do stoku $[5, 5]$. [2]

VIII) Párování a Hallova věta - Náhradní za úlohu 4 2. písemky

21. Dokažte, že body libovolné konečné projektivní roviny lze očíslovat p_1, p_2, \dots, p_m a přímky L_1, L_2, \dots, L_m tak, aby pro každé i platilo, že p_i leží na L_i . [2]
22. Pro $n > 3$ vezměme n navzájem různých množin A_1, A_2, \dots, A_n , každou o velikosti $n - 3$, jejichž sjednocením je množina X velikosti n . Dokažte, že A_1, A_2, \dots, A_n má systém různých reprezentantů. [2]
23. Uvažujme libovolnou $(0, 1)$ -matici A (viz definice u úlohy 16). *Linie* v A jsou řádky a sloupce A . Dokažte, že velikost největší množiny jedniček A , z nichž žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani sloupci, je stejná jako minimální počet linií v A pokrývajících všechny jedničky. [3]

IX) Počítání dvěma způsoby - Náhradní za úlohu 5 2. písemky

24. Počítáním (například počtu způsobů, jak něco udělat) dvěma způsoby dokažte

$$\forall n, m; n \geq m : \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}.$$

[2]

25. Písemka se skládala ze šesti úloh a psalo ji 20 studentů. Každou úlohu vyřešilo alespoň 12 studentů. Dokažte, že existuje dvojice studentů takových, že každou úlohu vyřešil alespoň jeden z nich. [3]
26. Systém \mathcal{N} podmnožin n -prvkové množiny X nazveme *polonezávislý*, pokud neexistuje trojice $A, B, C \in \mathcal{N}$ taková, že $A \subset B \subset C$. Dokažte, že $|\mathcal{N}| \leq 2^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$. [2]
27. Mějme nakreslený rovinný graf, kde každá stěna (včetně vnější) je trojúhelník (tj. obsahuje právě **tři vrcholy** grafu) a každý vrchol má libovolně přiřazeno jedno z čísel 1, 2, 3. Dokažte, že počet stěn obsahujících vrcholy se všemi třemi čísly je sudý. [2]