Výsledky příkladů ze cvičení KGI 9.3.2011

Budeme používat:

- š(n) pro počet permutací n-prvkové množiny bez pevného bodu
- $s(n,k)$ pro počet surjektivních zobrazení z n-prvkové množiny na k-prvkovou

Spočtěte:

1. Počet způsobů rozdělení n lidí do k neprázdných skupin.
   Výsledek: $s(n,k)$

2. Počet různých způsobů rozdělení n manželských párů do n tanečních párů tak, aby žádní manželé nebyli spolu v tanečním páru.
   Výsledek: š(n)

3. Počet způsobů rozesazení n manželských párů na $2n$ míst v řadě tak, aby žádní manželé neseděli vedle sebe.
   Idea řešení: PIE na množiny rozesazení, kdy p-tý pár sedí vedle sebe
   Výsledek:
   $$(2n)! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} 2^i (2n-i)!$$

4. Počet způsobů přidělení klobouků takových, že přesně k z n návštěvníků dostane svůj klobouk.
   Výsledek: $\binom{n}{k}$š$(n-\mathbf{k})$

5. Pravděpodobnost, že nějaká dvojice lidí ze 30-členné skupiny slaví narozeniny stejný den.
   Výsledek přes počet prostých funkcí:
   $$1 - \frac{\binom{365}{30} 30!}{365^{30}} \approx 0,7063.$$

   Lze řešit i pomocí PIE na množiny $A_{i,j}$ přiřazení narozenin k lidem, kde lidé i a j dostanou stejný den. Tento postup v tomto případě ale rozhodně nedoporučuji. Zde budeme počítat jen po průniky trojic množin.
   $$\begin{aligned}
   |A_{i,j}| &= 365^{29} \\
   |A_{i,j} \cap A_{i,k}| &= |A_{i,j} \cap A_{k,l}| = 365^{28} \\
   |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{j,k}| &= |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{k,l}| = |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{i,l}| = \\
   &= |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{l,m}| = |A_{i,j} \cap A_{k,l} \cap A_{m,n}| = 365^{27}
   \end{aligned}$$

Je třeba počítat s tím, že např. přiřazení, kdy má trojice lidí i, j, k stejný den narozenin, se započítá do tří průniků dvojice množin a do jednoho průniku trojice množin. Výsledek začíná (bez záruky):

$$\left|\bigcup A_{i,j}\right| = \binom{30}{2}365^{29} - \left(\frac{\binom{30}{2}\binom{28}{2}}{2} + 3\binom{30}{3}\right)365^{28} +$$
$$+\left(\frac{\binom{30}{2}\binom{28}{2}\binom{26}{2}}{3!} + 3\binom{30}{3}\binom{28}{2} + 16\binom{30}{4}\right)365^{27} + \binom{30}{3}365^{28} -$$
$$-\ldots$$

Už jen tímto jsme ale zjistili, že výsledek bude mezi $0,4832$ a $0,8068$.

6. Počet grafů s izolovaným vrcholem.
   Idea řešení: PIE na množiny grafů, kdy j-tý vrchol je izolovaný
   Výsledek:
   $$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}2^{\binom{n-i}{2}}.$$

7. Permutace slova MISSISSIPPI, kde nejsou žádná dvě S vedle sebe.
   Výsledek přes PIE (Případy, kdy dvě dvojice S jsou vedle sebe se dělí na případy, kdy jdou tři S za sebou a kdy máme dvě disjunktní dvojice S):
   $$11! - 4\cdot 3\cdot 10! + \left(\frac{4!9!}{2} + 4\cdot 3\cdot 2\cdot 9!\right) - 4!8! = 8467200$$
   Alternativní řešení: Nejprve spočítáme permutace, kde nejsou dvě S vedle sebe a na konci slova není S: Každému S přiřadíme jedno z ostatních písmen, které bude následovat po tomto S ($7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$ možností). Máme 4 nedělitelné dvojice písmen a 3 zbývající písmena a vše navzájem zpermutujeme ($7!$ možností). Při počítání slov, kde nějaké S je na konci a žádná dvě S nejdou po sobě nejdříve vybereme S, které bude na konci a pak postupujeme podobně, jako v předchozím případě. Vyjde:
   $$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 7! + 4\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 7! = 8467200.$$

8. Počet přirozených čísel n, $1 \le n \le 100$, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného přirozeného čísla většího než 1.
   Výsledek přes PIE:
   $$100 - \lfloor 100/4\rfloor - \lfloor 100/9\rfloor - \lfloor 100/25\rfloor - \lfloor 100/49\rfloor + \lfloor 100/36\rfloor + \lfloor 100/100\rfloor = 61.$$

9. Počet permutací s právě jedním cyklem.
   Výsledek (zde se PIE nepoužije): $(n-1)!$