Domácí úkoly z diskrétní matematiky

Všechna svá tvrzení řádně zdůvodněte, a to i v případě, že to u úlohy není výslovně uvedeno. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a cvičení, vždy ale napište znění tvrzení, které používáte.

Část I - Kombinatorika

1. Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $6|4n^3 + 2n$ (tj. $4n^3 + 2n$ je dělitelné 6). [2]

2. Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte (např. matematickou indukcí podle n při pevném r; pak je v 1. indukčním kroku **nutné uvažovat všechny případy s $\mathbf{n = r}$**):

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

[3]

3. Pro všechna celá čísla $n \geq 1$ dokažte (např. matematickou indukcí):

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k = \frac{3}{2}(3^n(n^2 - n + 1) - 1).$$

[2]

4. Pro každé $k \geq 3$ dokažte, že součet vnitřních úhlů v každém konvexním (tj. všechny úhly menší než 180^o) k-úhelníku je $(k-2) \cdot 180^o$. [2]

5. Najděte příklad dvojice relací (R_1, R_2) takové, že R_1 i R_2 jsou tranzitivní, ale $R_1 \cup R_2$, $R_1 \setminus R_2$ ani $R_1 \Delta R_2$ tranzitivní nejsou. [3]

   $R_1 \Delta R_2$ značí symetrický rozdíl, což je operace, která vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R_1 a R_2. Formálně zapsáno $R_1 \Delta R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$.

6. (a) Najděte příklad relace $R \subseteq X \times X$ na množině $X = \{1, 2, \ldots 7\}$, která je zároveň ekvivalencí i částečným uspořádáním (tj. je zároveň reflexivní, symetrická, tranzitivní i slabě antisymetrická). [2]

   (b) Najděte všechny takové relace na množině $X = \{1, 2, \ldots 7\}$. [2]

7. Nechť $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ je relace (mezi dvojicemi přirozených čísel) definovaná následovně:

$$R = \{((a, b), (c, d)) : a + b \leq c - d\}.$$

   Rozhodněte, zda je R tranzitivní, reflexivní, symetrická, slabě antisymetrická. Svá tvrzení dokažte. Nulu za přirozené číslo nepovažujeme. [2]

8. Kolik je na množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (a) všech relací? [1]

   (b) relací zároveň reflexivních a symetrických? [2]

   (c) ekvivalencí? [3]

9. Kolika způsoby lze postavit n **navzájem nerozlišitelných** věží na šachovnici $k \times m$ tak, aby se žádné dvě navzájem neohrožovaly? Můžete předpokládat $k \geq m \geq n$. [2]

10. Kolik lze maximálně postavit střelců na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali? Dokažte také, že jich více postavit nelze. [4]

11. Na šachovnici $n \times n$ chceme přejít z levého dolního políčka (o souřadnicích $(1,1)$) do pravého horního políčka (o souřadnicích (n,n)). V každém kroku můžeme přejít vždy buď o jedno políčko nahoru, nebo doprava. Kolika způsoby to můžeme udělat, pokud:

    (a) není žádné další omezení. [2]

    (b) na políčku (i,j) je díra, a tedy na toto políčko nemůžeme vstoupit. Můžete předpokládat, že platí $(1 < i < n,\ 1 < j < n)$. [3]

    (c) díry jsou na políčkách (i,j) a (k,l). Platí $(1 < i < k < n,\ 1 < j < l < n)$. [3]

12. Určete počet různých uspořádaných dvojic (A,B), kde A a B jsou množiny splňující

    (a) $A \subseteq B \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ [3]

    (b) $A \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, $B \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ a $|A \cap B| = 1$ [3]

13. Kolika způsoby lze rozdělit n navzájem nerozlišitelných kuliček do m navzájem rozlišitelných přihrádek? (do každé přihrádky se vejde libovolný počet kuliček) [3]

14. V klobouku je na začátku 10 lístečků, každý s číslem 5. V každém kroku náhodně vytáhneme jeden lísteček a do klobouku místo něj vhodíme x lístečků, každý s číslem $x-1$, kde x je číslo na vytaženém lístečku. Po kolika krocích skončíme? [3]

15. Kolem kulatého stolu sedí n matfyzáků, z nichž každý má skleničku. Každý si chce přiťuknout s každým; nechtějí si při tom ale ťukat křížem. V každém kroku si naráz přiťuknou některé dvojice, a to takové, že žádné dvě se navzájem nekříží (každý matfyzák si v jednom kroku smí přiťuknout s nejvýše jedním z ostatních).

    Jaký je minimální počet kroků, za který si mohou všichni navzájem přiťuknout? Dokažte také, že to rychleji udělat nelze. [3]

16. Vláda chce pomoci dvěma bankám. Má na to připraveny peníze předem rozdělené do mnoha "balíčků", přičemž nejmenší obsahuje přesně 100 milionů a v žádném není více než 200 milionů. Má ale stanoveno pravidlo, že každý den smí dát jen jeden balíček - tedy každý den si vybere jeden ze zbývajících balíčků a jednu ze dvou bank, které ten balíček dá. Dokažte, že vláda může balíčky distribuovat tak, že v žádném okamžiku nebude rozdíl sum peněz, které banky do té doby obdržely, větší než 100 milionů. [5]

Část II - Pravděpodobnost

1. Test na HIV dá správný výsledek z 95% (tj. člověku s virem dá pozitivní výsledek s pravděpodobností 95% a člověku bez viru s 5%). V populaci má virus 1 z 10000 lidí. Určete pravděpodobnost, že náhodný člověk, kterému vyšel test pozitivně, virus opravdu má. [2]

2. Mějme šestistěnnou kostku s pravděpodobnostmi stěn $1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8$. Určete pravděpodobnost toho, že při alespoň dvou ze tří hodů padne stejná stěna. [3]

3. Rodina má dvě děti, z nichž alespoň jedno je kluk. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou kluci? Předpokládejte, že pravděpodobnost narození holky a kluka je stejná. [2]

4. Hodíme šestkrát spravedlivou hrací kostkou, tj. každé z čísel 1 až 6 vždy padne s pravděpodobností 1/6. Jev A značí, že součet všech hodů je 34; B je jev, kdy při prvním hodu padlo číslo 5 a C jev, kdy při prvním a druhém hodu padlo stejné číslo.

   (a) Spočtěte $\Pr(A)$, $\Pr(B)$ a $\Pr(C)$. [2]

   (b) Spočtěte podmíněnou pravděpodobnost $\Pr(B|A)$ a rozhodněte, zda jsou A a B nezávislé. [2]

   (c) Spočtěte $\Pr(C|B)$ a rozhodněte zda jsou B a C nezávislé. [1]

5. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů náhodné permutace na n prvcích. (Pevný bod permutace π je prvek i splňující $\pi(i) = i$.) [2]

6. Jaká je střední hodnota počtu hodů šestistěnnou kostkou než padne každá stěna alespoň jednou? [4]

7. V kasinu si můžete zahrát hru, při které si vsadíte 100 korun, hodíte n šestistěnnými kostkami a vyhrajete 1000 korun, pokud padne součet alespoň $4n$.

   (a) Jaká je střední hodnota součtu ok na kostkách? [1]

   (b) Jaký je rozptyl součtu ok na kostkách? [2]

   (c) Pomocí Čebyševovy nerovnosti najděte horní odhad na pravděpodobnost, že padl součet alespoň $4n$. Pro která n se hra určitě nevyplatí? [3]

Část III - Teorie grafů

1. Určete všechny dvojice (n, k) takové, že existuje k-regulární graf na n vrcholech. [3]

2. Najděte všechny hodnoty n a m, pro které je daný graf izomorfní se svým doplňkem.

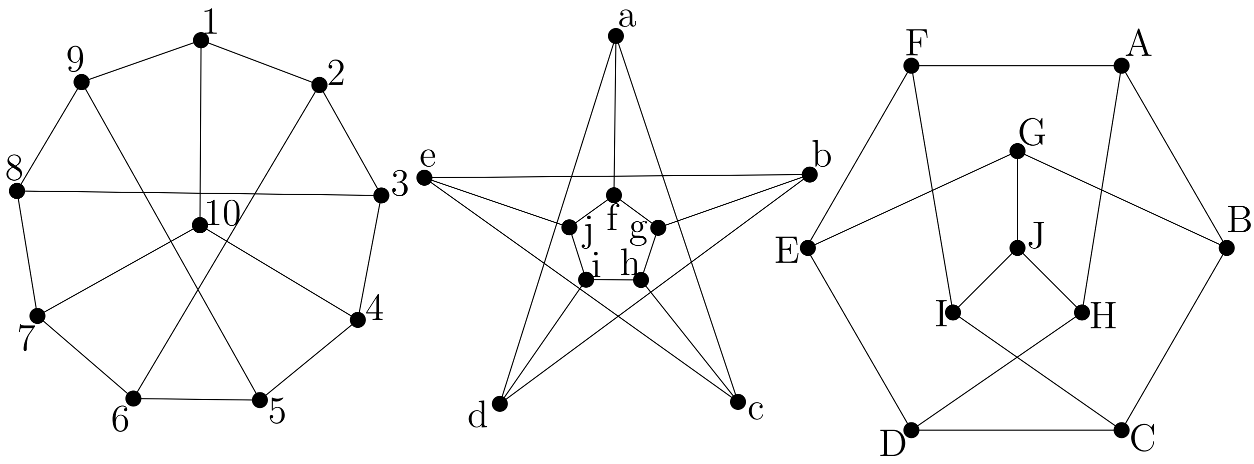
   (a) kružnice C_n [2]

   (b) cesta P_n [2]

   (c) úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ [2]

3. Pro každé $k \geq 2$ najděte dva navzájem neizomorfní k-regulární grafy na stejném počtu vrcholů. [3]

4. Najděte izomorfismus mezi grafy na obrázku. [4]



5. Kolik je v K_n celkem různých
   (a) hamiltonovských kružnic. [3]
   (b) hamiltonovských cest. [2]

   Dvě kružnice (resp. cesty) považujeme za různé, liší-li se množinou hran, které obsahují.

6. Najděte všechny indukované podgrafy grafu K_n, které jsou bipartitní. [2]

7. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
   - graf G nemá kružnici a $|V(G)| = |E(G)| + 1$
   - graf G nemá kružnici a je souvislý [3]

8. Na šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarveno modře. Na jedno z modrých políček umístíme věž. Věží můžeme pohybovat vždy jen z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se musíme pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah. [5]

9. Dokažte, že každý hranově 2-souvislý graf na n vrcholech (kde $n \geq 3$) má alespoň n koster. Graf je *hranově 2-souvislý*, pokud má alespoň 1 hranu, je souvislý a zůstane souvislý i po odebrání libovolné hrany. [4]

10. Určete počet koster grafu $K_{2,n}$. [3]

11. Nechť T je strom na n vrcholech se stupni všech vrcholů nejvýše 3. Dokažte, že
    (a) $r(T) \geq \log_2(n/3)$, kde $r(T)$ značí poloměr grafu T, tj. největší r takové, že ke každému vrcholu u existuje vrchol v ve vzdálenosti $dist(u, v) = r$. [3]
    (b) $diam(T) \geq 2\log_2(n) - 4$, kde $diam(T)$ značí průměr grafu T, tj. největší r takové, že existuje dvojice vrcholů u, v ve vzdálenosti $dist(u, v) = r$. [3]

12. Dokažte, že pro každý souvislý graf G na $n \geq 2$ vrcholech platí $diam(G) \leq 2r(G)$. ($diam$ a r jsou definované u minulého příkladu) [2]

13. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ existuje posloupnost n čísel, která je skórem

   (a) alespoň $2^{\binom{n}{2}}/n^n$ různých grafů. [2]

   (b) alespoň $2^{\binom{n}{2}}/\binom{2n-1}{n}$ různých grafů. [4]

   (c) alespoň $2^{\binom{n}{2}}/(n! \cdot \binom{2n-1}{n})$ navzájem neizomorfních grafů. Můžete bez důkazu použít výsledek části 13b), a to i v případě, že ji nemáte vyřešenou. [2]

14. Najděte příklad dvou navzájem neizomorfních grafů, které oba mají zadané skóre. To, že jsou navzájem neizomorfní také dokažte (někdy se může hodit pozorování, že dva grafy jsou izomorfní právě tehdy, když jejich doplňky jsou izomorfní).

   (a) (4,3,2,1,1,1,1,1) [2]

   (b) (3,3,3,3,3,3) [3]

15. Najděte posloupnost kladných přirozených čísel, která není skóre žádného grafu, ačkoli je součet jejích členů sudý a její největší člen je ostře menší než počet jejích členů. [3]

16. Dokažte, že každý souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé. [2]

17. Může být doplněk nesouvislého grafu také nesouvislý? Své tvrzení dokažte. [4]

18. Nakreslete následující grafy do roviny tak, aby hrany byly nakresleny rovnými úsečkami a aby se žádné dvě hrany nekřížily.

   (a) K_4 [1]

   (b) $K_5 \setminus \{e\}$, kde e je libovolná hrana K_5 [2]

   (c) $K_{2,8}$ [2]

   (d) $K_{3,3} \setminus \{e\}$, kde e je libovolná hrana $K_{3,3}$ [2]

19. Dokažte, že je-li graf G eulerovský, pak je i jeho line-graf $L(G)$ eulerovský. *Line-graf* grafu G je graf $L(G)$, jehož vrcholy odpovídají hranám grafu G a hrany $L(G)$ vedou právě mezi dvojicemi vrcholů $L(G)$ odpovídajícími dvojicím hran G, které mají společný vrchol. [4]

20. Pro graf $G = (V, E)$ je orientací G každý orientovaný graf $G' = (V, E')$, který vznikne z G nahrazením každé hrany $\{u, v\} \in E$ buď šipkou (u, v), nebo šipkou (v, u). Orientovaný graf G' je vyvážený, jestliže pro každý jeho vrchol v platí $deg^+(v) = deg^-(v)$ (tj. počet šipek, které z něj vychází je stejný jako počet šipek, které v něm končí). Dokažte, že graf G má vyváženou orientaci, právě tehdy, když mají všechny jeho vrcholy sudé stupně. [3]

21. Rozhodněte, zda pro každý graf G platí $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$, kde n je počet vrcholů grafu G a $\overline{G}$ je jeho doplněk. [5]

22. Určete barevnost grafu $K_n \setminus \{e\}$, kde e je libovolná hrana K_n. [2]

23. Pro každé $k \geq 1$ najděte graf, který má maximální stupeň k a přitom ho nelze obarvit k barvami. [1]

24. Pro každé $c \geq 2$ najděte dvojici grafů G_1, G_2 takovou, že oba mají stejné skóre a přitom G_1 lze obarvit c barvami, ale G_2 potřebuje barev více. [4]