Domácí úkoly z diskrétní matematiky - verze z 12. prosince 2007

Část I - Kombinatorika

1. Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte (např. matematickou indukcí podle n při pevném r):
$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$
[3]

2. Pro všechna celá čísla $n \geq 1$ dokažte (např. matematickou indukcí):
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k = \frac{3}{2}(3^n(n^2 - n + 1) - 1).$$
[2]

3. Pro každé $k \geq 3$ dokažte, že součet vnitřních úhlů v **konvexním (tj. všechny úhly menší než** 180^o**)** k-úhelníku je $(k-2) \cdot 180^o$. [2]

4. Najděte příklad dvojice relací (R_1, R_2) takové, že R_1 i R_2 jsou tranzitivní, ale $R_1 \cup R_2$, $R_1 \setminus R_2$ ani $R_1 \Delta R_2$ tranzitivní nejsou. [3]

   $R_1 \Delta R_2$ značí symetrický rozdíl, což je operace, která vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R_1 a R_2. Formálně zapsáno $R_1 \Delta R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$.

5. (a) Najděte příklad relace na množině $\{1, 2, \ldots 7\}$, která je zároveň ekvivalencí i částečným uspořádáním. [2]
   (b) Najděte všechny takové relace na množině $\{1, 2, \ldots 7\}$. [2]

6. Kolik je na množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (a) všech relací? [1]
   (b) relací zároveň reflexivních a symetrických? [2]
   (c) ekvivalencí? [3]

7. Kolika způsoby lze postavit n věží na šachovnici $k \times m$ tak, aby se žádné dvě navzájem neohrožovaly? Můžete předpokládat $k \geq m \geq n$. [2]

8. Kolik lze maximálně postavit střelců na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali? Dokažte, že jich více postavit nelze. **[3]**

9. Na šachovnici $n \times n$ chceme přejít z levého dolního políčka (o souřadnicích $(1, 1)$) do pravého horního políčka (o souřadnicích (n, n)). V každém kroku můžeme přejít vždy buď o jedno políčko nahoru, nebo doprava. Kolika způsoby to můžeme udělat, pokud navíc:
   (a) na políčku (i, j) je díra, a tedy na toto políčko nemůžeme vstoupit. Můžete předpokládat, že platí $(1 < i < n,\ 1 < j < n)$. [3]
   (b) díry jsou na políčkách (i, j) a (k, l). Platí $(1 < i < k < n,\ 1 < j < l < n)$. [3]

10. Kolika způsoby můžeme vytvořit permutaci písmen A, K, O, R, T, U tak, že nelze vyškrtáním některých písmen získat žádné ze slov AUTO, RUKA, ROK? (Např. TROUAK není správná permutace, protože vyškrtáním písmen T, U, A získáme slovo ROK.) [2]

11. Kolika způsoby můžeme posadit n manželských párů kolem $2n$-místného kulatého stolu tak, aby se pravidelně střídali muži a ženy a aby žádná žena neseděla po levici svého manžela. Dvě rozesazení považujeme za stejná, liší-li se pouze pootočením stolu. [4]

12. Kolem kulatého stolu sedí n matfyzáků, z nichž každý má skleničku. Každý si chce přiťuknout s každým; nechtějí si při tom ale ťukat křížem. V každém kroku si naráz přiťuknou některé dvojice, a to takové, že žádné dvě se navzájem nekříží (každý matfyzák si v jednom kroku smí přiťuknout s nejvýše jedním z ostatních).

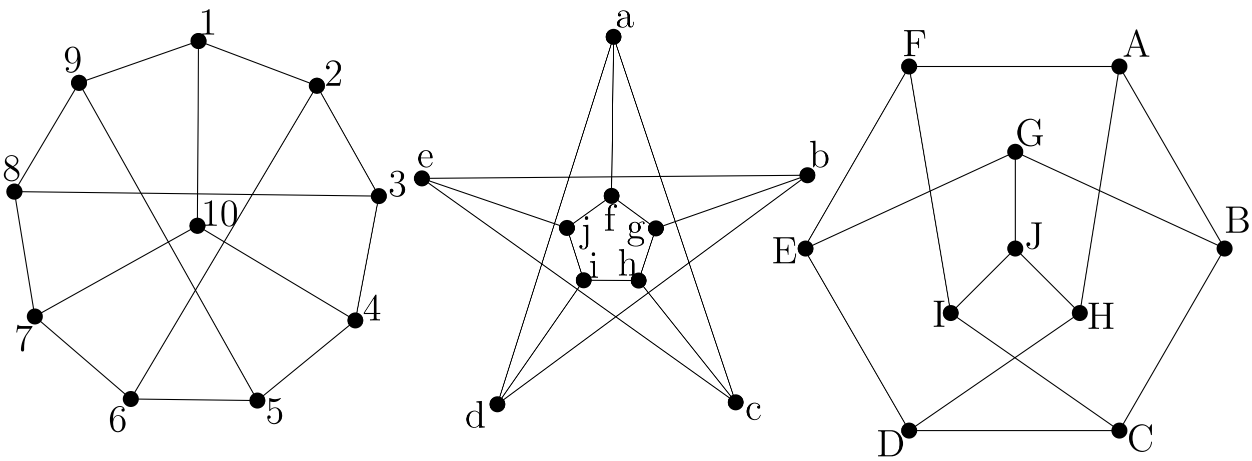
    Jaký je minimální počet kroků, za který si mohou všichni navzájem přiťuknout? Dokažte také, že to rychleji udělat nelze. [3]

Část II - Teorie grafů

1. Najděte všechny hodnoty n a m, pro které je daný graf izomorfní se svým doplňkem.
    (a) C_n [2]
    (b) P_n [2]
    (c) $K_{m,n}$ [2]

2. Rozhodněte, pro která n jsou
    (a) každé dva 1-regulární grafy na n vrcholech izomorfní. [2]
    (b) každé dva 2-regulární grafy na n vrcholech izomorfní. [2]

3. Najděte izomorfismus mezi grafy na obrázku. [4]



4. Dokažte, že pro každé n existuje posloupnost n čísel, která je skórem alespoň $2^{\binom{n}{2}}/(n! \cdot n^n)$ navzájem neizomorfních grafů. [4]

5. Najděte příklad dvou navzájem neizomorfních grafů, které oba mají zadané skóre. To, že jsou navzájem neizomorfní také dokažte (někdy se může hodit tvrzení, že dva grafy jsou izomorfní právě tehdy, když jejich doplňky jsou izomorfní).

   (a) (3,3,3,3,3,3,3,3) [2]

   (b) (3,3,3,3,3,3) [2]

6. Najděte posloupnost kladných přirozených čísel, která není skóre žádného grafu, ačkoli je součet jejích členů sudý a její největší člen je ostře menší než počet jejích členů. [3]

7. Může být doplněk nesouvislého grafu také nesouvislý? Své tvrzení dokažte. [4]

8. Pro které grafy existuje uzavřený sled procházející každou hranou alespoň jednou? Své tvrzení dokažte. [2]

9. Pro graf $G = (V, E)$ je orientací G každý orientovaný graf $G' = (V, E')$, který vznikne z G nahrazením každé hrany $\{u, v\} \in E$ buď šipkou (u, v), nebo šipkou (v, u). Orientovaný graf G' je vyvážený, jestliže pro každý jeho vrchol v platí $deg^+(v) = deg^-(v)$ (tj. počet šipek, které z něj vychází je stejný jako počet šipek, které v něm končí). Dokažte, že graf G má vyváženou orientaci, právě tehdy, když mají všechny jeho vrcholy sudé stupně. [4]

10. Kolik je v K_n celkem různých

    (a) hamiltonovských kružnic. [3]

    (b) hamiltonovských cest. [2]

    Dvě kružnice (resp. cesty) považujeme za různé, liší-li se množinou hran, které obsahují.

11. Najděte všechny indukované podgrafy K_n, které jsou bipartitní. [2]

12. Nakreslete následující grafy do roviny tak, aby hrany byly nakresleny rovnými úsečkami a aby se žádné dvě hrany nekřížily.

    (a) K_4 [2]

    (b) $K_5 \setminus e$, kde e je libovolná hrana K_5 [2]

    (c) $K_{2,6}$ [3]

13. Kolik hran musíme doplnit do stromu s l listy, abychom dostali 2-souvislý graf? Dokažte také, že méně hran nestačí. [4]

14. Dokažte, že $T = (V, E)$ je strom, právě tehdy, když T nemá kružnice a $|V| = |E| + 1$. [3]

15. V šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarvno modře. Na jedno z modrých políček umístíme věž. Věží můžeme pohybovat vždy jen z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se musíme pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah. [5]