9. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 16. 4. 2026 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2526/past/`

Konvoluce

Úloha 1 (Sčítáme náhodné veličiny)
Buďte $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

a) Jaké je rozdělení $X + Y$?

b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Řešení a) $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x) F_Y(z-x) \mathrm{d}x = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z e^{(\lambda-\lambda)z} \mathrm{d}x = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$ (pro $z \geq 0$)

b) $f_{X+Y+Z}(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$

Úloha 2 (Součet podruhé)
Buďte $X, Y, Z \sim U(0,1)$ nezávislé náhodně veličiny.

a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku".

b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

c) Jak výsledek ověřit samplováním?

Řešení a) evidentně 0 mimo $[0, 2]$, pro $z \in [0, 1]$: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) F_Y(z-t) \mathrm{d}t = \int_0^z 1 dx = z$, pro $z \in [1, 2]$: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) F_Y(z-t) \mathrm{d}t = \int_{z-1}^{z} 1 dx = 2 - z$

b) Zase konvoluce po částech, mimo $[0, 3]$ evidentně 0, na $[0, 1] : f_{X+Y+Z}(w) = w^2/2$,na $[1, 2] : f_{X+Y+Z}(w) = -w^2 + 3w - 3/2$, na $[2, 3] : f_{X+Y+Z}(w) = (w-3)^2/2$.

c) prostě budeme samplovat

Sdružená hustota

Úloha 3 (První setkání)
Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = \mathrm{e}^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

c) Jsou X, Y nezávislé?

d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

Řešení a) $f_X(x) = \int_0^{\infty} F_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}y = e^{-x}$, stejně tak $f_Y(y)$

b) $F_X(x) = 1 - e^{-x}, F_{X,Y}(x, y) = (1 - e^x)(1 - e^y)$

c) Ano, součin $f_X f_Y$ je $f_{X,Y}$

d) První je dvojný integrál přes $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-x-y} dy dx = \frac{e-2}{e}$, druhý je $\int_0^{\infty} \int_0^x e^{-x-y} dy dx = \frac{1}{2}$

Úloha 4 (Náhodný bod)
Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

Řešení a) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x^2+y^2>1 \\ \frac{2}{\pi} & x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

b) $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y^2>1 \\ \frac{2\cdot\sqrt{1-y^2}}{\pi} & y^2 \leq 1 \end{cases}$, $\mathbb{E}[Y] = \int_{-1}^{1} \frac{2\cdot y\sqrt{1-y^2}}{\pi} dy = 0$, prim. fce je $\frac{-2(1-y^2)^{3/2}}{3\pi}$

Tahák

- *Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.
- *Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$.
- *Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$.
- *Nezávislost:* $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- *Konvoluce:* Pokud $A = X+Y$, máme $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\mathrm{d}t$.

Bonusové úlohy

Úloha 5 (Buffonova jehla)
Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.
Nápověda: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

Řešení
Nechť $\Theta \in [0, \pi/2]$ je ostrý úhel jehly s rovnoběžkami a D je vzdálenost středu jehly od nejbližší čáry. Pak

$$\Theta \sim U(0, \pi/2), \qquad D \sim U(0, d/2),$$

nezávisle. Jehla protne čáru právě když

$$D \leq \frac{\ell}{2} \sin\Theta.$$

Proto

$$\mathbb{P}(\text{průnik}) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{(\ell/2)\sin\theta}{d/2}\, d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{d} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}.$$