

## 9. cvičení

### Konvoluce

#### Úloha 1 (Sčítáme náhodné veličiny)

Bud'te  $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$  nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení  $X + Y$ ?
- Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ?

#### Úloha 2 (Součet podruhé)

Bud'te  $X, Y, Z \sim U(0, 1)$  nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení  $X + Y$ ? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu  $[0, 1]$ .
- Jak výsledek ověřit smplováním?

### Sdružená hustota

#### Úloha 3 (První setkání)

Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu  $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$  pro  $x, y > 0$  (a 0 jinak).

- Určete marginální hustoty  $f_X, f_Y$ .
- Určete také distribuční funkce  $F_X, F_Y, F_{X,Y}$ .
- Jsou  $X, Y$  nezávislé?
- Najděte  $P(X + Y \leq 1)$  a  $P(X > Y)$ .

#### Úloha 4 (Náhodný bod)

Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočtěte pomocí ní  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Pro kontrolu spočtěte  $\mathbb{E}(Y)$  přímo (pomocí pravidla LOTUS).

### Tahák

- Sdružené rozdělení:*  $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$ .
- Sdružená hustota:*  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$ .
- Marginální hustota:*  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$ .
- Nezávislost:*  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ .
- Konvoluce:* Pokud  $A = X + Y$ , máme  $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$ .

---

### Bonusové úlohy

#### Úloha 5 (Buffonova jehla)

Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky  $\ell$ . Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímký ve vzdálenosti  $d$ . Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

*Nápověda:* Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).