

## 8. cvičení

### Práce s distribuční funkcí a hustotou

#### Úloha 1

Pro n.v.  $X$  s hustotou  $f_X$  vyjádřete

- $P(X \in [0, 1])$
- $P(X > 0)$
- $P(X < 0)$

#### Řešení

Pro n.v.  $X$  s hustotou  $f_X$  platí:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbb{P}(X \in [0, 1]) &= \int_0^1 f_X(x) dx, \\ \text{(b)} \quad \mathbb{P}(X > 0) &= \int_0^{\infty} f_X(x) dx, \\ \text{(c)} \quad \mathbb{P}(X < 0) &= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx. \end{aligned}$$

(Případně  $\mathbb{P}(X < 0) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 0)$ ; u spojitě n.v. je  $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ .)

#### Úloha 2 (Křup)

Metrový klacek rozložíme na dva kusy lomem v uniformně náhodném bodě. Buď  $X$  délka delší části. Jaké rozdělení má  $X$  a jakou střední hodnotu?

#### Řešení

Uniformní na intervalu  $[0.5, 1]$  – střední hodnota je 0.75.

#### Úloha 3 (Algoritmus ze dvou algoritmů)

Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost  $p$ , B pravděpodobnost  $1 - p$ . Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je  $X, Y, Z$ .

(Čas na výběr algoritmu v  $Z$  počítat pro jednoduchost nemusíte.)

- Vyjádřete  $\mathbb{E}(Z)$  pomocí  $\mathbb{E}(X)$  a  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Určete  $F_Z$  pomocí  $F_X, F_Y$ .
- Pokud jsou  $X, Y$  spojitě, určete  $f_Z$  pomocí  $f_X, f_Y$ .

#### Řešení

Střední hodnota je vážená

$$F_Z(x) = pF_X(x) + (1 - p)F_Y(x)$$

$$f_Z = pf_X + (1 - p)f_Y$$

### Distribuční funkce a nezávislost

#### Úloha 4 (Minimum z exponenciálních n.v.)

Nechť  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$  pro  $i = 1, \dots, n$  jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme  $M = \min(X_1, \dots, X_n)$ . Ukažte, že  $M \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ .

#### Řešení

$$P[M > t] = \prod_{i=1}^n P[X_i > t] = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

#### Úloha 5 (Maximum z uniformních)

Buď  $Y$  maximum z  $k$  uniformně náhodných čísel z intervalu  $[0, 1]$ .

- a) Najděte distribuční funkci  $F_Y$ .
- b) Odsud určete hustotu  $f_Y$ .
- c) Spočítejte  $\mathbb{E}(Y)$ .
- d) Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

**Řešení** a)  $F_Y(x) = x^k$  na intervalu  $[0, 1]$ , 0 pro  $x \leq 0$ , 1 pro  $x \geq 1$

b) 0 mimo  $[0, 1]$ , na  $[0, 1]$  to je  $kx^{k-1}$

c)  $\int_0^1 kx^k dx = \frac{k}{k+1}$

d)  $F_Z(x) = 1 - (1-x)^k$ ,  $f_Z(x) = k(1-x)^{k-1}$ ,  $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{k+1}$  (opět na stejných intervalech jako předtím)

## Konvoluce

**Úloha 6** (Sčítáme náhodné veličiny)

Buďte  $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$  nezávislé náhodně veličiny.

- a) Jaké je rozdělení  $X + Y$ ?
- b) Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ?

**Řešení** a)  $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x)F_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z e^{(\lambda-\lambda)x} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$   
(pro  $z \geq 0$ )

b)  $f_{X+Y+Z}(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ ,

**Úloha 7** (Součet podruhé)

Buďte  $X, Y, Z \sim U(0, 1)$  nezávislé náhodně veličiny.

- a) Jaké je rozdělení  $X + Y$ ? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- b) Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu  $[0, 1]$ .
- c) Jak výsledek ověřit sámkplováním?

**Řešení** a) evidentně 0 mimo  $[0, 2]$ , pro  $z \in [0, 1]$  :  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)F_Y(z-t)dt = \int_0^z 1dx = z$ , pro  $z \in [1, 2]$ :  
 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)F_Y(z-t)dt = \int_{z-1}^z 1dx = 2-z$

b) Zase konvoluce po částech, mimo  $[0, 3]$  evidentně 0, na  $[0, 1]$  :  $f_{X+Y+Z}(w) = w^2/2$ , na  $[1, 2]$  :  $f_{X+Y+Z}(w) = -w^2 + 3w - 3/2$ , na  $[2, 3]$  :  $f_{X+Y+Z}(w) = (w-3)^2/2$ .

- c) prostě budeme sámkplovat

## Sdružená hustota

**Úloha 8** (První setkání)

Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu  $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$  pro  $x, y > 0$  (a 0 jinak).

- a) Určete marginální hustoty  $f_X, f_Y$ .
- b) Určete také distribuční funkce  $F_X, F_Y, F_{X,Y}$ .
- c) Jsou  $X, Y$  nezávislé?
- d) Najděte  $P(X + Y \leq 1)$  a  $P(X > Y)$ .

**Řešení** a)  $f_X(x) = \int_0^{\infty} F_{X,Y}(x, y)dy = e^{-x}$ , stejně tak  $f_Y(y)$

b)  $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ ,  $F_{X,Y}(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$

c) Ano, součin  $f_X f_Y$  je  $f_{X,Y}$

d) První je dvojný integrál přes  $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-x-y} dy dx = \frac{e-2}{e}$ , druhý je  $\int_0^{\infty} \int_0^x e^{-x-y} dy dx = \frac{1}{2}$

## Tahák

- *Sdružené rozdělení:*  $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s,t) dt ds$ .
- *Sdružená hustota:*  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$ .
- *Marginální hustota:*  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$ .
- *Nezávislost:*  $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ .
- *Konvoluce:* Pokud  $A = X + Y$ , máme  $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$ .

---

## Bonusové úlohy

### Úloha 9 (Buffonova jehla)

Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky  $\ell$ . Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti  $d$ . Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

*Nápověda:* Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

### Řešení

Nechť  $\Theta \in [0, \pi/2]$  je ostrý úhel jehly s rovnoběžkami a  $D$  je vzdálenost středu jehly od nejbližší čáry. Pak

$$\Theta \sim U(0, \pi/2), \quad D \sim U(0, d/2),$$

nezávisle. Jehla protne čáru právě když

$$D \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta.$$

Proto

$$\mathbb{P}(\text{průnik}) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{(\ell/2) \sin \theta}{d/2} d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{d} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}.$$