

8. cvičení

Práce s distribuční funkcí a hustotou

Úloha 1

Pro n.v. X s hustotou f_X vyjádřete

- $P(X \in [0, 1])$
- $P(X > 0)$
- $P(X < 0)$

Úloha 2 (Křup)

Metrový klacek rozložíme na dva kusy lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části. Jaké rozdělení má X a jakou střední hodnotu?

Úloha 3 (Algoritmus ze dvou algoritmů)

Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p , B pravděpodobnost $1 - p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z .

(Čas na výběr algoritmu v Z počítat pro jednoduchost nemusíte.)

- Vyjádřete $\mathbb{E}(Z)$ pomocí $\mathbb{E}(X)$ a $\mathbb{E}(Y)$.
- Určete F_Z pomocí F_X, F_Y .
- Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y .

Distribuční funkce a nezávislost

Úloha 4 (Minimum z exponenciálních n.v.)

Nechť $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Úloha 5 (Maximum z uniformních)

Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

- Najděte distribuční funkci F_Y .
- Odsud určete hustotu f_Y .
- Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.
- Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

Konvoluce

Úloha 6 (Sčítáme náhodné veličiny)

Buďte $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodné veličiny.

- Jaké je rozdělení $X + Y$?
- Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Úloha 7 (Součet podruhů)

Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.

- Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.
- Jak výsledek ověřit smplováním?

Sdružená hustota

Úloha 8 (První setkání)

Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

- Určete marginální hustoty f_X, f_Y .
- Určete také distribuční funkce $F_X, F_Y, F_{X,Y}$.
- Jsou X, Y nezávislé?
- Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

Tahák

- Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$.
- Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.
- Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$.
- Nezávislost:* $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- Konvoluce:* Pokud $A = X + Y$, máme $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x - t) dt$.

Bonusové úlohy

Úloha 9 (Buffonova jehla)

Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ . Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d . Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Nápověda: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).