6. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 26. 3. 2026 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2526/past/`

Poznávačka náhodných veličin

Název	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah ($\operatorname{Im} X$)	Střední hodnota	Rozptyl
Bernoulliho $\mathrm{Ber}(p)$	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
Binomické $\mathrm{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	np	$np(1-p)$
Geometrické $\mathrm{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \ldots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo $\mathrm{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \ldots\}$	λ	λ
Uniformní $\mathrm{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \ldots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Úloha 1 (Hacker)
Pravděpodobnost, že do našeho serveru pronikne hacker je během každého dne 0.01, nezávisle pro každý den. Označme T počet dnů do prvního průniku. Jaké je rozdělení T, $\mathbb{E}(T)$, $\mathrm{var}(T)$? Jaká je pravděpodobnost, že server zůstane bezpečný po celý rok?

Úloha 2 (Test-driven probability)
Každý test programu může skončit buď nalezením chyby (úspěch) nebo ne (neúspěch). Předpokládáme, že pravděpodobnost nalezení chyby při jednom testu je 0.05 a vývojář provede 20 nezávislých testů, označíme X počet nalezených chyb. Jaké je rozdělení X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$? Jaká je pravděpodobnost, že nalezne právě tři chyby?

Úloha 3 (Vyřizování žádostí)
Historická data ukazují, že náš server obdrží průměrně 30 žádostí za minutu. Použijte Poissonovo rozdělení k určení pravděpodobnosti, že server obdrží přesně 40 žádostí v následující minutě.

Rozptyl

- **Definice:** rozptyl X je $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- **Věta:** $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- **Věta:** $\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{var}(X)$
- **Věta:** pokud $X \perp Y$, máme $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$
- **Definice:** směrodatná odchylka X je $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$
- **Definice:** variační koeficient X je $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$ (pokud $\mathbb{E}(X) > 0$)

Úloha 4 (Rozptyl z definice)
Spočtete přímo z definice rozptyl $\mathrm{Unif}(a, b)$ – stačí pro $a = -2$, $b = 2$. Srovnejte s tabulkou.

Úloha 5 (Sliiide to the right)
Dokažte, že $\mathrm{var}(X + b) = \mathrm{var}(X)$.

Úloha 6 (Geometrické rozdělení a škálování)
Buď $X \sim \mathrm{Geo}(0.1)$ a $Y \sim \mathrm{Geo}(0.01)$. Zvolte konstantu c tak, aby veličiny X a $Z = cY$ měly stejnou střední hodnotu. Porovnejte rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient pro X, Y, Z.

Náhodné vektory

Úloha 7 (Opět házeme kostkami)
Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).

a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_1 = \max(X, Y)$?

b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_2 = XY$?

Nápověda: Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y), pokud $\max(X, Y) = k$? Resp. v druhé části, pokud $XY = k$?

Úloha 8 (A zase kostky)
Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, k$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.

a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. $X_1, \dots, X_k$. (Bylo na přednášce!)

b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

c) V téhle části je $k = 3$, $n = 10$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. Určete $p_{X_1|X_3}(4|4)$.

Kovariance a korelace

- $\operatorname{cov}(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \overset{\text{věta}}{=} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\operatorname{cov}(X, X) = \operatorname{var}(X)$
- $\operatorname{cov}(X, Y)$ je lineární v obou složkách, tj. např. $\operatorname{cov}(X, a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1\operatorname{cov}(X, Y_1) + a_2\operatorname{cov}(X, Y_2)$
- $\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Úloha 9 (Coco taxi)
Nezávislé náhodné veličiny X, Y mají střední hodnotu 0 a rozptyl 1. Položíme $Z_0 = Y$, $Z_1 = X + 0.3Y$ a $Z_2 = 0.4X + Y$. Spočtěte $\operatorname{cov}(X, Z_i)$ a také korelaci $\rho(X, Z_i)$. Který obrázek odpovídá kterému vzorci?