

## 5. cvičení

### Podmíněná střední hodnota

#### Úloha 1 (Kvíz)

V kvízu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou  $-1/4$  bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností  $q$  jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

- Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?
- A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?
- Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

#### Úloha 2 (Trpělivost)

Můj počítač občas zlobí: každý den s pravděpodobností  $p > 0$  zamrzne. Když se to stane dva dny po sobě, začnu to řešit. Jaký je střední počet dnů, než se to stane?

#### Úloha 3 (Riskuj!)

V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U otázky A odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U otázky B je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměna za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

- Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou A?
- Co když začne otázkou B?
- Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu  $p_A, p_B$  a odměny  $m_A, m_B$ , jak se má soutěžící rozhodnout?

### Poznávka náhodných veličin

Název	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah ( $\text{Im } X$ )	Střední hodnota	Rozptyl
Bernoulliho $\text{Ber}(p)$	$p_X(1) = p, p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	$p$	$p(1 - p)$
Binomické $\text{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$np$	$np(1 - p)$
Geometrické $\text{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo $\text{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	$\lambda$	$\lambda$
Uniformní $\text{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

#### Úloha 4 (Hacker)

Pravděpodobnost, že do našeho serveru pronikne hacker je během každého dne 0.01, nezávisle pro každý den. Označme  $T$  počet dnů do prvního průniku. Jaké je rozdělení  $T$ ,  $\mathbb{E}(T)$ ,  $\text{var}(T)$ ? Jaká je pravděpodobnost, že server zůstane bezpečný po celý rok?

#### Úloha 5 (Test-driven probability)

Každý test programu může skončit buď nalezením chyby (úspěch) nebo ne (neúspěch). Předpokládáme, že pravděpodobnost nalezení chyby při jednom testu je 0.05 a vývojář provede 20 nezávislých testů, označíme  $X$  počet nalezených chyb. Jaké je rozdělení  $X$ ,  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{var}(X)$ ? Jaká je pravděpodobnost, že nalezne právě tři chyby?

#### Úloha 6 (Vyřizování žádostí)

Historická data ukazují, že náš server obdrží průměrně 30 žádostí za minutu. Použijte Poissonovo rozdělení k určení pravděpodobnosti, že server obdrží přesně 40 žádostí v následující minutě.

## Rozptyl

- **Definice** rozptyl  $X$  je  $\text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- **Věta:**  $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- **Věta:**  $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$
- **Věta:** pokud  $X \perp Y$ , máme  $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$
- **Definice:** směrodatná odchylka  $X$  je  $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$
- **Definice:** variační koeficient  $X$  je  $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$  (pokud  $\mathbb{E}(X) > 0$ )

### Úloha 7 (Rozptyl z definice)

Spočtete přímo z definice rozptyl  $\text{Unif}(a, b)$  – stačí pro  $a = -2$ ,  $b = 2$ . Srovnejte s tabulkou na minulé straně.

### Úloha 8 (Slide to the right)

Dokažte, že  $\text{var}(X + b) = \text{var}(X)$ .

### Úloha 9 (Geometrické rozdělení a škálování)

Bud'  $X \sim \text{Geo}(0.1)$  a  $Y \sim \text{Geo}(0.01)$ . Zvolte konstantu  $c$  tak, aby veličiny  $X$  a  $Z = cY$  měly stejnou střední hodnotu. Porovnejte rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient pro  $X, Y, Z$ .