4. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 12. 3. 2026 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2526/past/`

Ještě troška náhodných veličin

Název	Značení	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah (Im(X))	Střední hodnota
Bernoulliho	$X \sim \mathrm{Ber}(p)$	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomické	$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	np
Geometrické	$X \sim \mathrm{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \ldots\}$	$1/p$
Poissonovo	$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \ldots\}$	λ
Uniformní	$X \sim \mathrm{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \ldots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$
Hypergeometrické	$X \sim \mathrm{Hyp}(N, K, n)$	$p_X(k) =$	$\{0, 1, 2, \ldots, \min(n, K)\}$	$n \frac{K}{N}$

Úloha 1 (Která je tohle distribuce?)
Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou šestistěnnou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

Úloha 2 (Odpověď zní: Jigglypuff, pohled shora)
V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?

b) Jaká je $P(X = k)$?

c) S pomocí tabulky určete $\mathbb{E}[X]$, pro $n = 1$ si rozmyslete, že to je jasné.

Střední hodnota

Pro diskrétní náhodnou veličinu X definujeme její střední hodnotu $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P[X = x]$.

Úloha 3 (Kostky jsou vrženy)
Po hodu kostkou dostaneme za šestku 10 korun, za pětku 7 korun, za ostatní zaplatíme 5 korun. Jaká je střední hodnota výhry?

Úloha 4 (Lovci ponožek)
Máme neomezený počet černých a červených ponožek. Ponožky vytahujeme poslepu, obě barvy jsou stejně pravděpodobné.

a) Kolik ponožek ve střední hodnotě vytáhneme, než budeme mít dvě stejné barvy?

b) Řešte totéž pro tři různé barvy.

Úloha 5 (Know when to walk away)
Nové kasino nabízí následující hru: vsadíme x korun, s pravděpodobností $1/2$ o ně přijdeme, ale s pravděpodobností $1/2$ vyhrajeme $2x$ (navíc k našim x korunám).

a) Jaká je střední hodnota výhry?

b) Začínáme s k korunami. Pokud chceme maximalizovat střední hodnotu našich zisků po n kolech, jak to udělat (a kolik ta střední hodnota je)?

c) Jaká je pravděpodobnost, že s takovou strategií přijdeme o všechny peníze?

d) Jakou strategii byste zvolili?

Linearita střední hodnoty

Máme-li náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, pak $\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n] = \alpha_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + \alpha_n \mathbb{E}[X_n]$.

Úloha 6 (Hody mincí)
Hodíme n-krát korunou, která má pravděpodobnost, že padne Panna, rovnou p.

a) Označme X počet po sobě jdoucích hodů PO. (Např. pokud $n = 6$ a padlo postupně POOPOO, tak $X = 2$.) Určete $\mathbb{E}(X)$.

b) Rozmyslete si, proč se nejedná o binomické rozdělení.

c) Označme teď Y počet opakování hodů POP, jaká je $\mathbb{E}(Y)$?

Úloha 7 ($G(n,p)$)
Hodíme $\binom{n}{2}$-krát korunou, na které padne Panna s pravděpodobností p. Přitom tvoříme graf s vrcholy $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Postupně pro všechny dvojice $\{i, j\} \in \binom{V}{2}$ určíme, jestli jsou spojené hranou – to bude tehdy, když příslušným hodem padla Panna. Vzniklému grafu se říká (Erdősův-Rényiho) náhodný graf $G(n,p)$.
Ukažte, že střední hodnota počtu hran v grafu je $p\binom{n}{2}$ a střední hodnota počtu trojúhelníků v grafu je $p^3\binom{n}{3}$.

Úloha 8 (Za dva dny je PI(E) day!)
Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A.

a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?

b) Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Ověřte rovnost $1 - I_A = \prod_{i=1}^{n}(1 - I_{A_i})$.

c) Roznásobte a použijte větu o linearitě střední hodnoty. Dostanete princip inkluze a exkluze, který znáte z diskrétní matematiky.

Bonusové úlohy

Úloha 9 (Sběratel Hot Wheels)
Ke každému nákupu dostaneme jako dárek autíčko – náhodně vybrané z n typů. Kolik průměrně musíme udělat nákupů, než dostaneme všechny typy autíček?