3. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 5. 3. 2026 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2526/past/`

Bayes

Úloha 1 (Spam or ham?)
Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.

1. Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
2. Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označené jako spamy?
3. Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

Nezávislost jevů

Úloha 2 (Nezávislost a doplňky)
Ukažte, že jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i A, B^c a také A^c, B^c.

Úloha 3 (Nezávislost a disjunktnost)
Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?

Úloha 4 (Nezávislost a podmnožiny)
Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

Úloha 5 (Na lovu jevů)
Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které

1. jsou nezávislé.
2. nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
3. jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Přípravka na náhodné veličiny

Úloha 6 (Pokusy)
Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po první trefě. Označme X celkový počet hodů.

1. Jaká je $P[X > k]$?
2. Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P[X = x]$.
3. Jaká je $P[X \geq 10 | X \geq 5]$?

Úloha 7 (Pokusy, ale jinak)
Navazujeme na předchozí úlohu: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y (tj. určete $P[Y = y]$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$).

Úloha 8 (Pokusy, ale ještě jinak)
Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).

Úloha 9 (Klíče)
Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

1. Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
2. Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

Název	Značení	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah ($\mathrm{Im}(X)$)	Střední hodnota
Bernoulliho	$X \sim \mathrm{Ber}(p)$	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomické	$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np
Geometrické	$X \sim \mathrm{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$1/p$
Poissonovo	$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	λ
Uniformní	$X \sim \mathrm{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$
Hypergeometrické	$X \sim \mathrm{Hyp}(N, K, n)$	$p_X(k) =$	$\{0, 1, 2, \dots, \min(n, K)\}$	$n\frac{K}{N}$

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny? Tj., určete, jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k-tým pokusem.
Jak by oba předchozí případy dopadly, kdybychom měli 10 klíčů, ale dva byly správné?

Úloha 10 (Narozeniny)
Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

1. Použijte binomické rozdělení.
2. Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ je přibližně $\mathrm{Poi}(\lambda)$.
3. Co se změní, když budeme uvažovat narozeniny zítra?

Úloha 11 (Která je tohle distribuce?)
Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou šestistěnnou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

Úloha 12 (Odpověď zní: Jigglypuff, pohled shora)
V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

1. Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?
2. Jaká je $P(X = k)$?
3. S pomocí tabulky určete $\mathbb{E}[X]$, pro $n = 1$ si rozmyslete, že to je jasné.

Bonusové úlohy

Úloha 13 (Sir, this is a Wendy's)
Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

Úloha 14 (Hra v Sankt Petěrburgu)
Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

Úloha 15 (Prosecutor's fallacy)
Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Užitečné pojmy

Definice. Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.