2. cvičení

Úloha 1 (Hod dvěma mincemi)
Hodíme korunou a dvoukorunou, na každé z nich padá panna s pravděpodobností p, hody jsou na sobě nezávislé.

1. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna na koruně?
2. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna aspoň na jedné minci?

Je bez počítání jasné, která pravděpodobnost je větší?

Řešení
1. p, protože jsou hody nezávislé
2. $\frac{p^2}{1-(1-p)^2}$, protože možnosti jsou $(O,P),(P,O),(P,P)$.

Úloha 2 (Hey Brother)
Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte! Co jsou elementární jevy?)

Řešení
Záleží na předpokladech: buď 1/2 pokud se vládcem stává automaticky nejstarší nezávisle na pohlaví, nebo 1/3 pokud nejstarší syn = vládce, nebo 1 pokud nejstarší dcera = vládkyně. Zároveň ještě předpokládáme, že pravděpodobnost narození syna a dcery je tatáž, a že pohlaví sourozenců jsou nezávislá.
Elementární jevy jsou dvojice muž/žena.

Úloha 3 (Korelujeme?)
Jaký je vztah tvrzení $P(A|B) > P(A)$ a $P(B|A) > P(B)$?

Řešení
Z definice $P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \rightsquigarrow \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$.

Úloha 4 (Příčka je šprušle je špricle je šprusle je schůdek je st(o)upátko je tyčka je žbrdlina)
V krabici sto příček jsou čtyři nalomené. Vytáhneme postupně tři šprušle. Označme A_i jev „i-tá špricle není nalomená“.

1. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2)$. *Využijte podmíněnou pravděpodobnost.*
2. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Opět využijte podmíněnou pravděpodobnost. Pokud si nebudete vědět rady, koukněte na první užitečný vzorec.

Řešení
1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{95}{99} \cdot \frac{96}{100}$
2. $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{94}{98} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{96}{100}$

Úloha 5 (Kos-tič-ky)
Máme tři normální šestistěnné hrací kostky a jednu speciální šestistěnnou kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme.

1. Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička?
2. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku za podmínky, že padla jednička?

Řešení
1. $P(J) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
2. $P(N|J) = \frac{P(J|N) \cdot P(N)}{P(J)} = \frac{1/6 \cdot 3/4}{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$.

Úloha 6 (Spam or ham?)
Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.

1. Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?

2. Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označené jako spamy?
3. Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

Řešení
Značíme jevy: O: „označený jako spam", S : „je spam".

1. $P(O) = P(O|S) \cdot P(S) + P(O|\neg S) \cdot P(\neg S) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.05 \cdot 0.2 = 0.73$
2. $P(\neg S|O) = \frac{P(O|\neg S) \cdot P(\neg S)}{P(O)} = \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.73} = \frac{1}{73}$
3. $P(S|\neg O) = \frac{P(\neg O|S) \cdot P(S)}{P(\neg O)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.27} = \frac{8}{27}$

Úloha 7 (Monty Hall)
V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;
(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi nezaviněně prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Pro snazší domluvu: vybereme dveře číslo 1, auto je za náhodnými dveřmi. Poté, co moderátor otevře dveře 2 nebo 3, tak naši volbu změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

Řešení
Značíme jevy A_1, A_2, A_3, O_2, O_3 jako Auto je za prvními dveřmi, i-té dveře byly Otevřeny.
$P[A_1|O_2] = \frac{P[O_2|A_1] \cdot P[A_1]}{P[O_2]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{P(O_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(O_2|A_2) \cdot P(A_2) + P(O_2|A_3) \cdot P(A_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$, druhá pravděpodobnost analogicky.
Jako níže: $P(A|K) = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$.
Druhá varianta: značíme jevy A jako vybrali jsme si prvně auto, K jako Monty Hall spadnul na kozu. Pak $P(A|K) = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{2}} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

Úloha 8 (Mincovní převaha)
Alice má $n + 1$ mincí, Bob jich má n. Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Ukažte, že pravděpodobnost, že Alici padla panna vícekrát, je $1/2$. *(Návod: Představte si, že Alice si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)*

Řešení
Nejdříve hodíme n mincemi. Pak je buď s pravděpodobností p Alice ve vedení, nebo je s pravděpodobností p Bob ve vedení, a nebo s pravděpodobností $1 - 2p$ mají stejně. Potom ještě hodíme poslední mincí – má pravděpodobnost $1/2$, že hodí pannu. Tedy celkově vyhraje s pravděpodobností $p + \frac{1-2p}{2} = 1/2$.

Bonusové úlohy

Úloha 9 (Prosecutor's fallacy)
Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Řešení
Pravděpodobnosti nemusí být nezávislé, a tohle je pst dvou náhlých úmrtí za předpokladu, že je nevinná. Naopak, jaká je pst toho, že je nevinná, za předpokladu dvou úmrtí je těžké říct.

Úloha 10 (Simpsonův paradox)
V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

Řešení

- bílá krabice: 2/8, černá krabice: 1/5
- bílý sáček: 2/2, černý sáček: 4/5
- bílé dohromady: 4/10, černé dohromady: 5/10.

Úloha 11 (Bertrandův paradox)
Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

Řešení
Záleží na tom, co znamená "náhodná tětiva".

- tětivu bereme náhodně přes oba její průsečíky s kružnicí: pak je pst 1/3 (BÚNO se první trefil do vrcholu, pak, aby byla tětiva delší, musí být v prostřední třetině)
- tětivu bereme tak, že vezmeme bod na kružnici, a pak vezmeme bod na poloměru mezi bodem a středem: protože hrana trojúhelníka dělí poloměr napůl, je pravděpodobnost 1/2
- vezmeme bod kdekoliv uvnitř kružnice, a to bude střed tětivy – aby pak tětiva byla delší, musí být v soustředném kruhu s polovičním průměrem, takže plocha je čtvrtinová, a pravděpodobnost je 1/4.

Na procvičení

Úloha 12 (Thopter Depths)
Hrajeme karetní hru, ve které všichni hrají tři typy balíčků: control hraje 45 % hráčů, aggro hraje 26 % hráčů a midrange hraje 29 % hráčů. Sestavili jsme nový combo balík, a zjistili jsme, že proti controlu máme šanci na výhru 40 %, proti aggru 55 % a proti midrange 75 %. Jaká je šance, že vyhrajeme první hru? (Předpokládejme, že soupeře vybíráme náhodně.)

Řešení
Věta o úplné pravděpodobnosti: jevy V výhra, C, A, M proti komu hraju: $P(V) = P(V|C) \cdot P(C) + P(V|A) \cdot P(A) + P(V|M) \cdot P(M) = 0.4 \cdot 0.45 + 0.55 \cdot 0.26 + 0.75 \cdot 0.29 = 0.5405$.

Úloha 13 (Dvě předpovědi)
Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé a mají jen dva výsledky: bude pršet, nebude pršet. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, hodíme si spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

Řešení
Rozhodneme se správně, pokud buď jsou obě úspěšné, nebo je právě jedna úspěšná a hod dopadne dobře. Takže $P[\text{úspěch}] = p^2 + \frac{2(1-p)p}{2} = p(p + 1 - p) = p$.
Intuice: Pokud se předpovědi neshodují, pak hod mincí také znamená, že si náhodně vyberu, které z těch dvou protiřečících si předpovědí věřím. Ale to mohu udělat i v případě, že se shodují. Takže ať už se předpovědi shodly nebo neshodly, já si náhodně vyberu jednu předpověď a té věřím. Tím pádem pravděpodobnost, že uhodnu správně počasí, je rovna pravděpodobnosti, že jedna konkrétní předpověď uspěla, což je přesně p.

Užitečné vzorce

- **Zřetězené podmiňování:** Pokud $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

- **Věta u úplné pravděpodobnosti:** Pokud $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

  (sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).

- **Bayesova věta:** Za předpokladů minulé části,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$