1. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 19. 2. 2026 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2526/past/`

Opakování diskrétní pravděpodobnosti

- Množina *elementárních jevů*: Ω (nejvýše spočetná)
- Množina *jevů* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- *Pravděpodobnost* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
- *Pravděpodobnostní prostor*: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\}) \rightsquigarrow$ speciálně $P(\emptyset) = 0$
- *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, pokud $P(B) \neq 0$

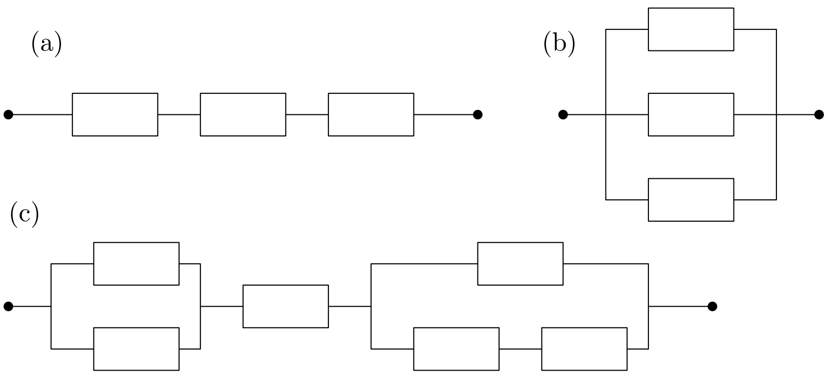
Úloha 1 (PIE pro pravděpodobnost)
Dokažte, že pro dva jevy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Úloha 2 (Mince)
Házíme 10 mincemi (neřekneme-li jinak, vždy myslíme poctivými a rozlišitelnými). Jaká je pravděpodobnost, že na aspoň dvou padne orel? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

Úloha 3 (Matfyzáku, nezlob se)
Házíme kostkou, při šestce házíme znovu. Jaká je pravděpodobnost, že hodíme nejvýše třikrát? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

Úloha 4 (Spravedlivost z nespravedlivosti)
Chceme spravedlivě rozlosovat mezi dvěma lidmi, ale máme jen cinknutou minci, kde padá orel s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Jak to udělat? Co když p neznáme?

Úloha 5 (Poruchy)
Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností p. Přesněji řečeno, porucha znamená, že skrz součástku neteče proud. Poruchy součástek jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky?



Podmíněná pravděpodobnost

Úloha 6 (Hod dvěma mincemi)
Hodíme korunou a dvoukorunou, na každé z nich padá panna s pravděpodobností p, hody jsou na sobě nezávislé.

1. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna na koruně?
2. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna aspoň na jedné minci?

Je bez počítání jasné, která pravděpodobnost je větší?

Úloha 7 (Hey Brother)
Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte! Co jsou elementární jevy?)

Bonusové úlohy

Úloha 8 (Monty Hall ve vězení)
Král udělí milost dvěma ze tří vězňů (ty vybere náhodně). Jednomu z nich dozorce nabídl, že mu řekne jméno jednoho z druhých dvou vězňů, který bude propuštěn. Vězeň ale odmítl: „pak bych měl pravděpodobnost propuštění jen 1/2, teď ji mám 2/3". Má pravdu?

Úloha 9 (Bertrandův paradox)
Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

Úloha 10 (Výdělečná činnost)
Na stole leží dvě obálky, o kterých víme, že v každé z nich je nějaký (nenulový, celočíselný) počet stokorun, v obou jiný. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Pokud chceme získat obálku s vyšším obnosem, můžeme ji získat s pravděpodobností větší než 1/2? (Nápovědu najdete dole.)

Na procvičení

Úloha 11 (Výdělečná činnost II)
Házíme férovou mincí, dokud nepadne orel, na každý hod dostaneme novou minci. (Jaká je pravděpodobnost, že získáme k mincí?) Pak všechny získané mince hodíme najednou, pokud na každé z mincí padne orel, můžeme si je všechny nechat. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane?

Nápověda k problému s obálkami: Vytáhneme minci a házíme, dokud nepadne panna. Označíme X celkový počet hodů (včetně posledního, tj. $X \geq 1$). Pokud v naší obálce je k stokorun, tak si obálku necháme, pokud $X < k$. Jaká je pravděpodobnost, že získáme obálku s vyšší částkou?