8. cvičení z PSt — 8.–12.4.2024

- $Exp(\lambda)$ má hustotu $\lambda e^{-\lambda x}$, distr. fci $1-e^{-\lambda x}$, střední hodnotu $1/\lambda$ a rozptyl $1/\lambda^2$.
- $N(0,1)$ má hustotu $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, distr. fci Φ, stř. hodnotu 0 a rozptyl 1.
- $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu $\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, distr. fci $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, střední hodnotu μ a rozptyl σ^2.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` – sekce Cumulative.

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad! Pokud se zaseknete, na konci jsou některé nápovědy.

Uniformní rozdělení

1. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas (0:00-24:00) se objeví na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

Exponenciální rozdělení

2. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

3. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

4. Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Objednáni jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?

(b) Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?

(c) Jaká je střední hodnota času, kdy začne zkoušení Blanky?

(d) Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Normální rozdělení

5. Nechť $Z \sim N(0,1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte

(a) $P(|Z| \leq 1)$
(b) $P(|Z| \leq 2)$
(c) $P(|Z| \leq 3)$
(d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Práce s distribuční funkcí

7. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.

(a) Jaké je rozdělení X?
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

8. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.

(a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.
(b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

Nápovědy

2, 3: použijte vzorec pro distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
4: b: příklad 3, c: věta o celkové střední hodnotě, d: linearita
5: Potřebujete vždy odečíst dvě vhodné hodnoty v tabulce na první stran 2.
6: Převeďte na tvrzení o náhodné veličině $N(0,1)$.
7: Spočtěte napřed distribuční funkci X, pak její hustotu.
8: Věta o celkové pravděpodobnosti platí i tady.

K procvičení

9. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu. (a) Najděte distribuční funkci F_X. (b) Najděte hustotní funkci f_X. (c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

10. Medián životnosti harddisku je 7 let – po 7 letech se jich přibližně polovina porouchá. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, spíš první aproximace, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)

(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

11. $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$.

(a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X.
(b) Spočtěte $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$.
(c) Spočtěte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

12. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

13. Nechť $X \sim N(0,1)$ a $Y = |X|$. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $\operatorname{var}(Y)$.

14. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.

(a) Jaké je λ?

(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?

(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?

(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

15. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?

(c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)

16. Najděte analogii „pravidla 3σ", neboli spočtěte $P(|X - \mathbb{E}(X)| < c \cdot \sigma_X)$ $(c = 1, 2, 3)$, pokud

(a) X má uniformní rozdělení, (b) $X \sim Exp(1)$, (c) $X \sim Exp(2)$.