7. cvičení z PSt — 2.4.–5.4.2024

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

Pokud je X spojitá, tak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

pro nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je

$$P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt, \qquad \text{tedy zejména} \qquad P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)dt$$

Platí také $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx$ a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ f_X(t)dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí i zde, že $\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Připomeňte si, jak se počítá určitý integrál pomocí primitivní funkce.

Používání F a f

1. Pro n.v. X s distribuční funkcí F_X vyjádřete
(a) $P(X \in (0,1])$ (b) $P(X > 0)$ (c) * $P(X < 0)$ (d) * $P(X \in [0,1])$

2. Vyřešte předchozí část znovu, pro n.v. X s hustotou f_X.

3. Nechť X splňuje $P(X = x) = 0$ pro každé x. (Rozmyslete si, že to není nic divného, a že se to děje pro každou spojitou náhodnou veličinu.)
Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin
(a) $-X$. (b) $X^+ = \max(0, X)$, (c) $|X|$.

4. Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \ge 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.
(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
(c) Spočtěte distribuční funkci F_X.
(d) Určete $P(2 \le X \le 3)$.
(e) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?
(f) Určete hustotu náhodné veličiny Y.

5. Říkáme, že X má exponenciální rozdělení, $X \sim Exp(\lambda)$, pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{pro } x \ge 0, \text{ jinak } 0.$$

Nalezněte f_X. Na přednášce si ukážeme, že $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

6. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.
(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

K procvičení

7. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0, 3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte
(a) $P(1 \leq X \leq 2)$ (b) $P(X \leq Y)$ (c) $P(X \leq Z)$ (d) hustotní funkci f_X. (e) distribuční funkce F_Y a F_Z.

8. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)
(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

9. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.
(a) Jaké je λ?
(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

10. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).
(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?
(c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)