6. cvičení

Poznávačka náhodných veličin

Úloha 1 (Hacker)
Pravděpodobnost, že do našeho serveru pronikne hacker je během každého dne 0.01, nezávisle pro každý den. Označme T počet dnů do prvního průniku. Jaké je rozdělení T, $\mathbb{E}(T)$, $\mathrm{var}(T)$? Jaká je pravděpodobnost, že server zůstane bezpečný po celý rok?

Úloha 2 (Test-driven probability)
Každý test programu může skončit buď nalezením chyby (úspěch) nebo ne (neúspěch). Předpokládáme, že pravděpodobnost nalezení chyby při jednom testu je 0.05 a vývojář provede 20 nezávislých testů, označíme X počet nalezených chyb. Jaké je rozdělení X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$? Jaká je pravděpodobnost, že nalezne právě tři chyby?

Úloha 3 (Vyřizování žádostí)
Historická data ukazují, že náš server obdrží průměrně 30 žádostí za minutu. Použijte Poissonovo rozdělení k určení pravděpodobnosti, že server obdrží přesně 40 žádostí v následující minutě.

Rozptyl

Úloha 4 (Here we go again)
Předpokládejme, že vyřešení jednoho příkladu trvá X minut, kde $X = 1, 2, \dots,$ nebo 5. Doba trvání je náhodná (závislá na počasí) a pravděpodobnostní funkce je $p_X(1) = p_X(2) = 0.1$, $p_X(3) = p_X(4) = 0.2$, $p_X(5) = 0.4$. Z minula víme, že $\mathbb{E}(X) = 3.7$. Určete $\mathrm{var}(X)$ a σ_X.

Úloha 5 (Je rozptyl taky lineární?)
Pro náhodné veličiny X, Y platí $Y = aX + b$ (kde a, b jsou reálná čísla).

a) Vyjádřete $\mathrm{var}(Y)$ pomocí $\mathrm{var}(X)$.

b) Zopakujte pro σ_X a CV_X.

Úloha 6 (Můžeme rozptyl definovat jinak?)
Dávají smysl následující „definice alternativního rozptylu“? Tj., dozvíte se o náhodné veličině X něco zajímavého, pokud zjistíte

a) $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))$?

b) $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$?

c) $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$ pro $k = 3, 4, \dots$?

Náhodné vektory

Úloha 7 (Opět házeme kostkami)
Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly $1, \dots, 4$).

a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_1 = \max(X, Y)$?

b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_2 = XY$?

Nápověda: Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y), pokud $\max(X, Y) = k$? Resp. v druhé části, pokud $XY = k$?

Úloha 8 (Čtení tabulky)

$x \backslash y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/12
1	1/6	1/4	1/12

V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

a) Najděte marginální rozdělení X i Y. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.

b) Jsou X a Y nezávislé? Neboli: platí $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$?

c) Popište rozdělení $X + Y$ – tj. nalezněte pravděpodobnostní funkci n.v. $X + Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(X + Y)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

d) Popište rozdělení $X \cdot Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(XY)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Na procvičení

Úloha 9 (Poisson, střední hodnota a rozptyl)
Nechť $X \sim Poi(\lambda)$. Odvoďte vztahy $\mathbb{E}(X) = \lambda$ a $\mathrm{var}(X) = \lambda$.

Užitečné pojmy

- definice $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- věta $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- odvozené veličiny:
  - směrodatná odchylka $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$
  - variační koeficient $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$ (pokud $\mathbb{E}(X) > 0$)
- Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y)$. „Jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají marginální pravděpodobnostní funkce. (Připomeňte si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$.)