5. cvičení

Střední hodnota

Úloha 1 (První setkání) a) Nechť $P(X = 100) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$. Určete $\mathbb{E}(X)$. (Přímo nebo pomocí některé vlastnosti střední hodnoty.)

b) Nechť $P(Y = 100) = p$, $P(Y = 99) = 1 - p$. Určete $\mathbb{E}(Y)$.

Úloha 2 („Průměrná“ rychlost)
Předpokládejme, že vyřešení jednoho příkladu trvá X minut, kde $X = 1, 2, \ldots,$ nebo 5. Doba trvání je náhodná (závislá na počasí) a pravděpodobnostní funkce je $p_X(1) = p_X(2) = 0.1$, $p_X(3) = p_X(4) = 0.2$, $p_X(5) = 0.4$. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

Úloha 3 (Lovci ponožek)
Máme neomezený počet černých a červených ponožek. Ponožky vytahujeme poslepu, obě barvy jsou stejně pravděpodobné.

a) Kolik ponožek ve střední hodnotě vytáhneme, než budeme mít dvě stejné barvy?

b) Řešte totéž pro tři různé barvy.

Úloha 4 (Know when to walk away)
Nové kasino nabízí následující hru: vsadíme x korun, s pravděpodobností $1/2$ o ně přijdeme, ale s pravděpodobností $1/2$ vyhrajeme $2x$ (navíc k našim x korunám).

a) Začínáme s k korunami. Pokud chceme maximalizovat střední hodnotu našich zisků po n kolech, jak to udělat (a kolik ta střední hodnota je)?

b) Jaká je pravděpodobnost, že s takovou strategií přijdeme o všechny peníze?

c) Jakou strategii byste zvolili?

Linearita

Úloha 5 (Hody mincí)
Hodíme n-krát korunou, která má pravděpodobnost, že padne Panna, rovnou p.

a) Označme X počet po sobě jdoucích hodů PO. (Např. pokud $n = 6$ a padlo postupně POOPOO, tak $X = 2$.) Určete $\mathbb{E}(X)$.

b) Rozmyslete si, proč se nejedná o binomické rozdělení.

c) Označme teď Y počet opakování hodů POP, jaká je $\mathbb{E}(Y)$?

Úloha 6 ($G(n, p)$)
Hodíme $\binom{n}{2}$-krát korunou, na které padne Panna s pravděpodobností p. Přitom tvoříme graf s vrcholy $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Postupně pro všechny dvojice $\{i, j\} \in \binom{V}{2}$ určíme, jestli jsou spojené hranou – to bude tehdy, když příslušným hodem padla Panna. Vzniklému grafu se říká (Erdősův-Rényiho) náhodný graf $G(n, p)$.
Ukažte, že střední hodnota počtu hran v grafu je $p\binom{n}{2}$ a střední hodnota počtu trojúhelníků v grafu je $p^3\binom{n}{3}$.

Podmíněná střední hodnota

Úloha 7 (Kvíz)
V kvízu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností q jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

Úloha 8 (Trpělivost)
Můj počítač občas zlobí: každý den s pravděpodobností $p > 0$ zamrzne. Když se to stane dva dny po sobě, začnu to řešit. Jaký je střední počet dnů, než se to stane?

Úloha 9 (Riskuj!)
V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U otázky A odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U otázky B je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměna za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou A?

b) Co když začne otázkou B?

c) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu p_A, p_B a odměny m_A, m_B, jak se má soutěžící rozhodnout?

Bonusové úlohy

Úloha 10
Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A.

a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?

b) Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Ověřte rovnost $1 - I_A = \prod_{i=1}^{n}(1 - I_{A_i})$.

c) Roznásobte a použijte větu o linearitě střední hodnoty. Dostanete princip inkluze a exkluze, který znáte z diskrétní matematiky.

Úloha 11 (Sběratel Hot Wheels)
Ke každému nákupu dostaneme jako dárek autíčko – náhodně vybrané z n typů. Kolik průměrně musíme udělat nákupů, než dostaneme všechny typy autíček?

Na procvičení

Úloha 12 (Ludvík kam se podíváš)
Král Ludvík chce mít mužského potomka, aby ho mohl opět pojmenovat Ludvík. V každém roce mu jeho manželka porodí právě jedno dítě, které je stejně pravděpodobně chlapec i děvče, nezávisle na předchozích pokusech. Všechny narozené děti přežijí. Pokud se narodí chlapec, tak další potomky už Ludvík mít nebude. Označme S počet narozených synů a D počet narozených dcer. Určete $\mathbb{E}(S)$ a $\mathbb{E}(D)$.

Užitečné pojmy

- Střední hodnota: $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x)$
- Indikátor jevu A je náhodná veličina $I_A = 1[A]$, která nabývá hodnoty 0 když A nenastane a hodnoty 1 když A nastane
- Podmíněná střední hodnota:

$$\mathbb{E}(X|B) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x|B)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i} P(B_i) \cdot \mathbb{E}(X|B_i) \qquad B_1, B_2, \ldots \text{ je rozklad } \Omega$$