4. cvičení

Náhodné veličiny

Úloha 1 (Hod kostkami)
Hodíme dvěma kostkami – pro jednoduchost čtyřstěnnými, s čísly 1, ..., 4. Označíme X maximum ze dvou hozených čísel. Popište, jak budete tuto situaci modelovat: co bude Ω, co přesně za matematický objekt je X, jaká je p_X.

Řešení
$\Omega = [4]^2$, $X : [4]^2 \to [4], (x, y) \mapsto \max(x, y)$, $p_X(1) = 1/16, p_X(2) = 3/16, p_X(3) = 5/16, p_X(4) = 7/16$

Úloha 2 (Narozeniny)
Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

1. Použijte binomické rozdělení.
2. Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $Bin(n, \lambda/n)$ je přibližně $Poi(\lambda)$.
3. Co se změní, když budeme uvažovat narozeniny zítra?

Řešení
1. Rozdělení je $X \sim \mathrm{Bin}(234, 1/365) \rightsquigarrow p_X(1) = 234 \cdot \frac{364^{233}}{365^{234}} \approx 0.338304648$
2. Vezmeme tedy Poi(234/365), z čehož vyjde $e^{-234/365} \cdot (234/365) \approx 0.337674748$.
3. Rozdělení a pravděpodobnosti jsou stejné, ale hodnoty X a Y se můžou lišit.

Úloha 3 (Taky vám chyběla analýza?)
Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim Poi(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.

Řešení
$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$
Pokud $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$, pak $p_X(k+1) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k+1}/(k+1)! = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k! \cdot \frac{\lambda}{k} = p_X(k) \cdot \frac{\lambda}{k}$, kde zlomek je evidentně větší než 1 pro $k < \lambda$, a jinak je menší.
Co se týče limity: $\lim_{k\to\infty} e^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k! \leq \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k \log(\lambda) - \lambda}}{e^{1-k} k^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k(\log(\lambda)+1)-\lambda-1}}{k^k}$, což jde k nule, a můžeme také použít horní odhad $k! \leq e^{k-1}k^{k+1}$, a opět půjdeme k nule, a využijeme dvou policajtů.

Úloha 4 (Klíče)
Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

1. Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
2. Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny? Tj., určete, jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k-tým pokusem.
Jak by oba předchozí případy dopadly, kdybychom měli 10 klíčů, ale dva byly správné?

Řešení
1. $Geom(1/5)$
2. uniformní na [5]
3. $Geom(1/5)$
4. $p_Y(1) = 2/10, p_Y(2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9}, p_Y(k) = \frac{2}{10-k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{9-j}{11-j}$

Úloha 5 (Která je tohle distribuce?)
Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou šestistěnnou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

Řešení
Po řadě $\mathrm{Bin}(m, 1/6), \mathrm{Bin}(n, 1/6), \mathrm{Bin}(m+n, 1/6)$.

Úloha 6 (Odpověď zní: Jigglypuff, pohled shora)
V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

1. Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?
2. Jaká je $P(X = k)$?

Řešení
1. Hypergeometrické, mělo zaznít na přednášce
2. $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Nezávislé náhodné veličiny

Definice. Řekneme, že dvě *diskrétní* náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, pokud pro každou dvojici čísel x_1, x_2 platí, že jevy $\{X = x_1\}$ a $\{Y = x_2\}$ jsou nezávislé.

Úloha 7 (Náhodné veličiny a indikátory)
Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

Řešení
$I_A = 1 \Leftrightarrow A$ se stane, takže to je poměrně evidentně ekvivalentní

Úloha 8 (Nezávislé náhodné veličiny a intervaly)
Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n.

Řešení
$P(X \leq x \wedge Y \leq y) = \sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y} P(X = i \wedge Y = j) = \sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y} P(X = i) \cdot P(Y = j) = \sum_{i=1}^{x} P(X = i) \cdot P(Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$

Bonusové úlohy

Úloha 9 (Hra v Sankt Petěrburgu)
Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

Řešení
Střední hodnota je nekonečno.

Úloha 10 (Lovec zápalek)
Roztržitý matematik má dvě kapsy kabátu, a v každé kapse má krabičku s n zápalkami. Pokaždé, když potřebuje zápalku, tak ji vezme z náhodné kapsy. Když takhle najde prázdnou krabičku, označme X počet zápalek v druhé krabičce. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

Řešení
TODO

Na procvičení

Úloha 11 (Trénink)
Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost p, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hodu, kterým se i-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \dots, X_n)$. Rozmyslete si:

1. Jaká je distribuce X_1, X_2, …?
2. Jsou veličiny X_1, X_2, … nezávislé?
3. Jaká je distribuce X? (Pro začátek se může hodit začít s $n = 2$.)

Řešení
1. Geom(p)
2. Ano (vlastně ze zadání).
3. $X \sim \mathrm{Geom}(1 - (1 - p)^n)$.

Pokédex užitečných diskrétních rozdělení

- *alternativní (Bernoulliho):*
  - Házíme mincí. Panna nebo orel?
  - $X \sim \mathrm{Bern}(p)$: $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$
  - $\mathbb{E}(X) = p$
- *binomické:*
  - Házíme n mincemi. Kolikrát padl orel?
  - $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ pro $0 \leq k \leq n$
  - $\mathbb{E}(X) = np$
- *geometrické:*
  - Házíme mincí, dokud nepadne orel. Kolikrát hodíme? (neboli tak dlouho se chodí se džbánem pro vodu…)
  - $X \sim \mathrm{Geom}(p)$: $p_X(k) = p(1 - p)^{k-1}$ pro $k \geq 1$
  - $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- *Poissonovo:*
  - Kolik černých koček přeběhne denně přes cestu?
  - $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$: $p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$