4. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 13. 3. 2024 https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2324/past/

Náhodné veličiny

Úloha 1 (Hod kostkami)
Hodíme dvěma kostkami – pro jednoduchost čtyřstěnnými, s čísly 1, ..., 4. Označíme X maximum ze dvou hozených čísel. Popište, jak budete tuto situaci modelovat: co bude Ω, co přesně za matematický objekt je X, jaká je p_X.

Úloha 2 (Narozeniny)
Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

1. Použijte binomické rozdělení.
2. Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $Bin(n, \lambda/n)$ je přibližně $Poi(\lambda)$.
3. Co se změní, když budeme uvažovat narozeniny zítra?

Úloha 3 (Taky vám chyběla analýza?)
Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim Poi(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.

Úloha 4 (Klíče)
Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

1. Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
2. Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny? Tj., určete, jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k-tým pokusem.
Jak by oba předchozí případy dopadly, kdybychom měli 10 klíčů, ale dva byly správné?

Úloha 5 (Která je tohle distribuce?)
Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou šestistěnnou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

Úloha 6 (Odpověď zní: Jigglypuff, pohled shora)
V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

1. Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?
2. Jaká je $P(X = k)$?

Nezávislé náhodné veličiny

Definice. Řekneme, že dvě *diskrétní* náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, pokud pro každou dvojici čísel x_1, x_2 platí, že jevy $\{X = x_1\}$ a $\{Y = x_2\}$ jsou nezávislé.

Úloha 7 (Náhodné veličiny a indikátory)
Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

Úloha 8 (Nezávislé náhodné veličiny a intervaly)
Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n.

Bonusové úlohy

Úloha 9 (Hra v Sankt Petěrburgu)
Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

Úloha 10 (Lovec zápalek)
Roztržitý matematik má dvě kapsy kabátu, a v každé kapse má krabičku s n zápalkami. Pokaždé, když potřebuje zápalku, tak ji vezme z náhodné kapsy. Když takhle najde prázdnou krabičku, označme X počet zápalek v druhé krabičce. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

Na procvičení

Úloha 11 (Trénink)
Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost p, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hodu, kterým se i-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Rozmyslete si:

1. Jaká je distribuce X_1, X_2, ...?
2. Jsou veličiny X_1, X_2, ... nezávislé?
3. Jaká je distribuce X? (Pro začátek se může hodit začít s $n = 2$.)

Pokédex užitečných diskrétních rozdělení

- *alternativní (Bernoulliho):*
  - Házíme mincí. Panna nebo orel?
  - $X \sim \text{Bern}(p)$: $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$
  - $\mathbb{E}(X) = p$
- *binomické:*
  - Házíme n mincemi. Kolikrát padl orel?
  - $X \sim \text{Bin}(n, p)$: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pro $0 \leq k \leq n$
  - $\mathbb{E}(X) = np$
- *geometrické:*
  - Házíme mincí, dokud nepadne orel. Kolikrát hodíme? (neboli tak dlouho se chodí se džbánem pro vodu...)
  - $X \sim \text{Geom}(p)$: $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ pro $k \geq 1$
  - $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- *Poissonovo:*
  - Kolik černých koček přeběhne denně přes cestu?
  - $X \sim \text{Poi}(\lambda)$: $p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$