3. cvičení

Nezávislost jevů

Úloha 1 (Dvě mince)
Dva hody mincí modelujeme uniformním prostorem $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Ověřte, že jev A_1 „první hod byla panna" a A_2 „druhý hod byla panna" jsou nezávislé podle definice na druhé stránce.

Řešení
TODO

Úloha 2 (Dvě mince, ale jiné)
Máme opět pravděpodobnostní prostor se čtyřmi elementárními jevy $\{PP, PO, OP, OO\}$, ale tentokrát není uniformní. Jako v předchozím příkladu, jev A_1 je „první písmeno je P" a jev A_2 je „druhé písmeno je P". Předpokládáme, že $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2$ a že jevy A_1 a A_2 jsou nezávislé. Ověřte, že tím je určena pravděpodobnost každého jevu v tomto pravděpodobnostním prostoru.

Řešení
TODO

Úloha 3 (Nezávislost a doplňky)
Ukažte, že jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i A, B^c a také A^c, B^c.

Řešení
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$.
Dva doplňky analogicky pro $A = B^c, B = A$.

Úloha 4 (Nezávislost a disjunktnost)
Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?

Řešení
Pokud A, B jsou disjunktní, pak $P(A \cap B) = 0$, a tedy pro nezávislost nutně musí platit $P(A)P(B) = 0$, což nastane jen tehdy, když $P(A) = 0 \vee P(B) = 0$.
Tedy ano, můžou, ale jen tehdy, když alespoň jeden z těchto jevů je nemožný (má nulovou pravděpodobnost).

Úloha 5 (Nezávislost a podmnožiny)
Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

Řešení
Máme $P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$, a tedy $P(A) = P(A)P(B)$, což může nastat jen tehdy, když $P(A) = 0$, nebo $P(B) = 1$.

Úloha 6
Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které

1. jsou nezávislé.
2. nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
3. jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Řešení

1. Házeme tři kostky, A, B, C jsou na první/druhé/třetí kostce padla jednička
2. Házeme jednou šestistěnnou kostkou: A: „padla sedmička", B : „padla dvojka", C : „padla trojka" $P(B \cap C) = 0 \neq P(B)P(C) = 1/36$, a $P(A)P(B)P(C) = 0 = P(A \cap B \cap C)$.

   Méně líně: házeme dvěma šestistěnkami, a máme A : „na první kostce padla 1, 2 nebo 3", B : „na první kostce padlo 3, 4, 5" a C : „součet na obou kostkách je 9". Pak $P(A) = P(B) = 1/2, P(C) = 1/9$, $P(A \cap B) = 1/6 \neq 1/4, P(A \cap C) = 1/36 \neq 1/18, P(B \cap C) = 1/12 \neq 1/18$, ale $P(A \cap B \cap C) = 1/36 = P(A)P(B)P(C)$.

3. Opět dvě kostky, jevy: A : „součet kostek je 7“, B : „na první kostce padla 3“, C : „na druhé kostce padla 4“. Pak $P(A) = P(B) = P(C) = 1/6$, a $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A \cap C) = 1/36$, ale $P(A \cap B \cap C) = 1/36 \neq 1/216 = P(A)P(B)P(C)$.

Úloha 7 (Nezávislost za podmínky *)
Najdete náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C, tj. $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$,
- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c,
- ale A, B nejsou nezávislé?

Řešení
Házeme šestistěnnou kostkou, jevy budou následující:

- A : padne $1, 2, 5, 6$
- B : padne $1, 3, 5, 6$
- C : padne $1, 2, 3, 4$

Pak $P(A|C) = P(B|C) = 1/2$ a $P(A \cap B|C) = 1/4$, $P(A|C^c) = P(B|C^c) = P(A \cap B|C^c) = 1$, ale $P(A) = 2/3, P(B) = 2/3$ a $P(A \cap B) = 1/2 \neq 4/9$.

Přípravka na náhodné veličiny

Úloha 8 (Pokusy)
Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po první trefě. Označme X celkový počet hodů.

1. Jaká je $P[X > k]$?
2. Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P[X = x]$.
3. Jaká je $P[X \geq 10|X \geq 5]$?

Řešení
1. $P[X > k] = (1 - 1/10)^k$
2. $P[X = k] = (1 - \frac{1}{10})^{k-1}\frac{1}{10}$
3. $P[X \geq 10|X \geq 5] = \frac{(1-1/10)^9}{(1-1/10)^4} = (1 - 1/10)^5$

Úloha 9 (Pokusy, ale jinak)
Navazujeme na předchozí úlohu označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y (tj. určete $P[Y = y]$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$).

Řešení
Jediné dvě zajímavé hodnoty jsou 0 a 1, a pro ty: $P[Y = 1] = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{2k} = \frac{1}{10} \sum_{i \geq 0} \left(\frac{81}{100}\right)^k = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{81}{100}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{100}{19} = \frac{10}{19}$, a tím pádem $P[Y = 0] = \frac{9}{10}$.

Úloha 10 (Pokusy, ale ještě jinak)
Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).

Řešení
Pro $k < 0, k > n, k \notin \mathbb{N} : P[Z = k] = 0$. Jinak $P[Z = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Bonusové úlohy

Úloha 11 (Sir, this is a Wendy's)
Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

Řešení
Více zde: `https://en.wikipedia.org/wiki/Raven_paradox`

Úloha 12 (Hra v Sankt Petěrburgu)
Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

Řešení
Střední hodnota je nekonečno.

Na procvičení

Úloha 13 (Nemocnice na kraji města)
Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má senzitivitu i specificitu $p = 0.95$ (senzitivita je pravděpodobnost, že nemocného člověka test opravdu určí jako nemocného, tedy P[test řekne „nemocný“|člověk je nemocný] a specificita je P[test řekne „zdravý“|člověk je zdravý], tedy pravděpodobnost, že zdravého člověka test opravdu označí za zdravého). Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

1. Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Co to říká o užitečnosti obou testů?
2. Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

Řešení
Pro $A : P(S) = P(C|A)\cdot P(A)+P(C^c|A^c)\cdot P(A^c) = \frac{P(A|C)\cdot P(C)}{P(A)}\cdot P(A)+\frac{P(A^c|C^c)\cdot P(C^c)}{P(A^c)}\cdot P(A^c) = P(A|C)\cdot P(C)+ P(A^c|C^c)\cdot P(C^c) = p\cdot 0.01+p\cdot 0.99 = p$, pro B analogicky $P(B|C)\cdot P(C)+P(B^c|C^c)\cdot P(C^c) = 0+0.99 = 0.99$. Stejná pravděpodobnost je pro $p = 0.99$.

Úloha 14 (Exit poll)
Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B. Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E|A) = 0.7$ a $P(E|A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A?

Úloha 15 (Kouřové signály)
Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

1. Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?
2. Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?
3. Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?

Úlohu si můžete zjednodušit předpokladem, že 0 a 1 mají stejnou pravděpodobnost správného přenosu.

Řešení
TODO

Užitečné pojmy

Definice. Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$
$$P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$
Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.