3. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 6. 3. 2024 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2324/past/`

Nezávislost jevů

Úloha 1 (Dvě mince)
Dva hody mincí modelujeme uniformním prostorem $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Ověřte, že jev A_1 „první hod byla panna“ a A_2 „druhý hod byla panna“ jsou nezávislé podle definice na druhé stránce.

Úloha 2 (Dvě mince, ale jiné)
Máme opět pravděpodobnostní prostor se čtyřmi elementárními jevy $\{PP, PO, OP, OO\}$, ale tentokrát není uniformní. Jako v předchozím příkladu, jev A_1 je „první písmeno je P“ a jev A_2 je „druhé písmeno je P“. Předpokládáme, že $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2$ a že jevy A_1 a A_2 jsou nezávislé. Ověřte, že tím je určena pravděpodobnost každého jevu v tomto pravděpodobnostním prostoru.

Úloha 3 (Nezávislost a doplňky)
Ukažte, že jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i A, B^c a také A^c, B^c.

Úloha 4 (Nezávislost a disjunktnost)
Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?

Úloha 5 (Nezávislost a podmnožiny)
Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

Úloha 6
Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které

1. jsou nezávislé.
2. nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
3. jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Úloha 7 (Nezávislost za podmínky *)
Najdete náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C, tj. $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$,
- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c,
- ale A, B nejsou nezávislé?

Přípravka na náhodné veličiny

Úloha 8 (Pokusy)
Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po první trefě. Označme X celkový počet hodů.

1. Jaká je $P[X > k]$?
2. Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P[X = x]$.
3. Jaká je $P[X \geq 10|X \geq 5]$?

Úloha 9 (Pokusy, ale jinak)
Navazujeme na předchozí úlohu označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y (tj. určete $P[Y = y]$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$).

Úloha 10 (Pokusy, ale ještě jinak)
Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).

Bonusové úlohy

Úloha 11 (Sir, this is a Wendy's)
Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

Úloha 12 (Hra v Sankt Petěrburgu)
Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

Na procvičení

Úloha 13 (Nemocnice na kraji města)
Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má senzitivitu i specificitu $p = 0.95$ (senzitivita je pravděpodobnost, že nemocného člověka test opravdu určí jako nemocného, tedy P[test řekne „nemocný“|člověk je nemocný] a specificita je P[test řekne „zdravý“|člověk je zdravý], tedy pravděpodobnost, že zdravého člověka test opravdu označí za zdravého). Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

1. Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Co to říká o užitečnosti obou testů?

2. Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

Úloha 14 (Exit poll)
Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B. Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E|A) = 0.7$ a $P(E|A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A?

Úloha 15 (Kouřové signály)
Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

1. Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

2. Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

3. Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?

Úlohu si můžete zjednodušit předpokladem, že 0 a 1 mají stejnou pravděpodobnost správného přenosu.

Užitečné pojmy

Definice. Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent).*