2. cvičení

Úloha 1 (PIE pro pravděpodobnost)
Dokažte, že pro dva jevy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Úloha 2 (Korelujeme?)
Jaký je vztah tvrzení $P(A|B) > P(A)$ a $P(B|A) > P(B)$?

Úloha 3 (Mandarinky)
V krabici sto mandarinek jsou čtyři zkažené. Vytáhneme postupně tři mandarinky. Označme A_i jev „i-tá mandarinka není zkažená“.

1. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2)$. **Využijte podmíněnou pravděpodobnost.**
2. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Opět využijte podmíněnou pravděpodobnost. Pokud si nebudete vědět rady, koukněte na první užitečný vzorec.

Úloha 4 (Kos-tič-ky)
Máme tři normální šestistěnné hrací kostky a jednu speciální šestistěnnou kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme.

1. Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička?
2. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku za podmínky, že padla jednička?

Úloha 5 (Spam or ham?)
Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.

1. Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
2. Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označené jako spamy?
3. Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

Úloha 6 (Monty Hall)
V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;
(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi nezaviněně prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Pro snazší domluvu: vybereme dveře číslo 1, auto je za náhodnými dveřmi. Poté, co moderátor otevře dveře 2 nebo 3, tak naši volbu změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

Úloha 7 (Mincovní převaha)
Alice má $n + 1$ mincí, Bob jich má n. Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Ukažte, že pravděpodobnost, že Alici padla panna vícekrát, je 1/2. *(Návod: Představte si, že Alice si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)*

Bonusové úlohy

Úloha 8 (Prosecutor's fallacy)
Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je 1/8500. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Úloha 9 (Simpsonův paradox)
V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

Úloha 10 (Bertrandův paradox)
Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

Na procvičení

Úloha 11 (Thopter Depths)
Hrajeme karetní hru, ve které všichni hrají tři typy balíčků: control hraje 45 % hráčů, aggro hraje 26 % hráčů a midrange hraje 29 % hráčů. Sestavili jsme nový combo balík, a zjistili jsme, že proti controlu máme šanci na výhru 40 %, proti aggru 55 % a proti midrange 75 %. Jaká je šance, že vyhrajeme první hru? (Předpokládejme, že soupeře vybíráme náhodně.)

Úloha 12 (Dvě předpovědi)
Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé a mají jen dva výsledky: bude pršet, nebude pršet. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, hodíme si spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

Užitečné vzorce

- Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

- Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

  (sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).

- Za předpokladů minulé části,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$