1. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 21. 2. 2024 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2324/past/`

Opakování diskrétní pravděpodobnosti

- Množina *elementárních jevů*: Ω (nejvýše spočetná)
- Množina *jevů* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- *Pravděpodobnost* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
- *Pravděpodobnostní prostor*: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\}) \rightsquigarrow$ speciálně $P(\emptyset) = 0$
- *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, pokud $P(B) \neq 0$

Úloha 1 (Mince)
Házíme 10 mincemi (neřekneme-li jinak, vždy myslíme poctivými a rozlišitelnými). Jaká je pravděpodobnost, že na aspoň dvou padne orel? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

Řešení
Pravděpodobnost je $1 - \frac{11}{2^{10}} = \frac{1013}{1024}$. Pravděpodobnostní prostor jsou všechny desetice $\{O, P\}^{10}$.

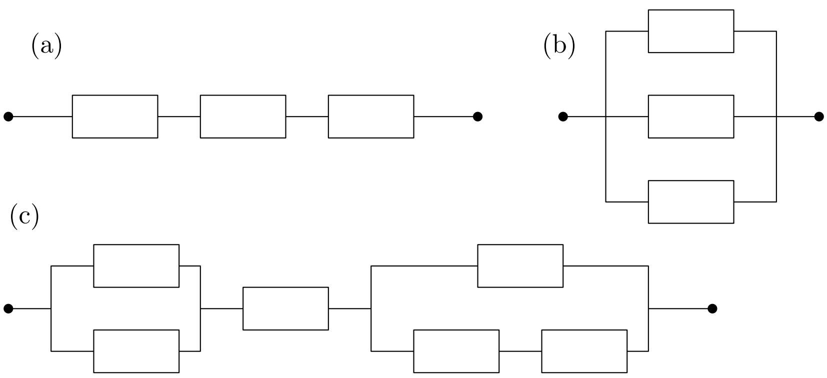
Úloha 2 (Matfyzáku, nezlob se)
Házíme kostkou, při šestce házíme znovu. Jaká je pravděpodobnost, že hodíme nejvýše třikrát? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

Řešení
Výsledek: $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6^3} = \frac{215}{216}$
Pravděpodobnostní prostor: může být různý, buď počty šestek, nebo posloupnosti šestek zakončené nešestkou,...

Úloha 3 (Spravedlivost z nespravedlivosti)
Chceme spravedlivě rozlosovat mezi dvěma lidmi, ale máme jen cinknutou minci, kde padá orel s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Jak to udělat? Co když p neznáme?

Řešení
Hodíme dvakrát: pokud padne PO, vyhraje jeden, pokud OP, vyhraje druhý, jinak opakujeme.

Úloha 4 (Poruchy)
Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností p. Přesněji řečeno, porucha znamená, že skrz součástku neteče proud. Poruchy součástek jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky?



Řešení

1. $(1 - p)^3$
2. $1 - p^3$
3. $(1 - p^2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p \cdot (1 - p)) = (1 + p)(1 - p)^2(1 - p(1 - (1 - p)^2))$

Podmíněná pravděpodobnost

Úloha 5 (Hod dvěma mincemi)
Hodíme korunou a dvoukorunou, na každé z nich padá panna s pravděpodobností p, hody jsou na sobě nezávislé.

1. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna na koruně?
2. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna aspoň na jedné minci?

Je bez počítání jasné, která pravděpodobnost je větší?

Řešení
1. 1/2, protože jsou hody nezávislé
2. 1/3, protože možnosti jsou $(O, P), (P, O), (P, P)$.

Úloha 6 (Hey Brother)
Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte! Co jsou elementární jevy?)

Řešení
Záleží na předpokladech: buď 1/2 pokud se vládcem stává automaticky nejstarší nezávisle na pohlaví, nebo 1/3 pokud nejstarší syn = vládce. Zároveň ještě předpokládáme, že pravděpodobnost narození syna a dcery je tatáž, a že pohlaví sourozenců jsou nezávislá.
Elementární jevy jsou dvojice muž/žena.

Bonusové úlohy

Úloha 7 (Monty Hall ve vězení)
Král udělí milost dvěma ze tří vězňů (ty vybere náhodně). Jednomu z nich dozorce nabídl, že mu řekne jméno jednoho z druhých dvou vězňů, který bude propuštěn. Vězeň ale odmítl: „pak bych měl pravděpodobnost propuštění jen 1/2, teď ji mám 2/3“. Má pravdu?

Řešení
Označme vězně A, B, C. Předpokládejme, že král už rozhodl (náhodně a nevratně), a dozorce nám sdělí částečně (pravdivé) informace o královĕ rozhodnutí. Potom je jasné, že pravděpodobnost, že A bude propuštěn je 2/3 nezávisle na tom, co dozorce řekne. Prozkoumejme však podrobněji úvahu Ačka. Pokud se A dozví, že B bude propuštěn, tak ví, že druhý propuštěný je buď A nebo C, takže jeho pravděpodobnost klesla na 1/2. To je samozřejmě nesmysl, ale kde je chyba v úvaze?
I když to působí divně, tak chyba je v tom, že v dané situaci má A větší šanci, než C. Rozeberme to ještě trochu víc. V zadání bylo řečeno, že dozorce řekne jednoho z vězňů B, C, který bude propouštěn. Pro konkrétnost předpokládejme, že pokud budou propuštěni B i C, tak dozorce vybere náhodně. (Rozmyslete si ale i možnost, kdy v tomto případě řekne vždy B.)
Označme AP je „A bude propuštěn“ a DB jev „dozorce řekne, že B bude propuštěn“. Potom $P(AP) = 2/3$, $P(DB) = 1/2$ (podle věty o rozboru možností: $0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$). Konečně $P(AP \cap DB) = 1/3$. Takže pečlivě spočítaná podmíněná pravděpodobnost je

$$P(AP|DB) = \frac{P(AP \cap DB)}{P(DB)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}\,.$$

Úloha 8 (Bertrandův paradox)
Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

Řešení
Záleží na tom, co znamená ”náhodná tětiva”.

- tětivu bereme náhodně přes oba její průsečíky s kružnicí: pak je pst 1/3 (búno první se trevil do vrcholu, pak, aby byla tětiva delší, musí být v prostřední třetině)
- tětivu bereme tak, že vezmeme bod na kružnici, a pak vezmeme bod na poloměru mezi bodem a středem: protože hrana trojúhelníka dělí poloměr napůl, je pravděpodobnost 1/2
- vezmeme bod kdekoliv uvnitř kružnice, a to bude střed tětivy – aby pak tětiva byla delší, musí být v soustředném kruhu s polovičním průměrem, takže polocha je čtvrtinová, a pravděpodobnost je 1/4.

Úloha 9 (Výdělečná činnost)
Na stole leží dvě obálky, o kterých víme, že v každé z nich je nějaký (nenulový, celočíselný) počet stokorun, v obou jiný. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Pokud chceme získat obálku s vyšším obnosem, můžeme ji získat s pravděpodobností větší než 1/2? (Nápovědu najdete dole.)

Řešení
Buď $k < \ell$. Náhodně zvolíme jednu a pak házíme dle hintu: přechod $k \rightsquigarrow \ell$ s pravděpodobností $\frac{1}{2^k}$, přechod obráceně s pravděpodobností $\frac{1}{2^\ell}$, a tedy máme pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2^\ell}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\ell+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} > 1/2$.

Na procvičení

Úloha 10 (Výdělečná činnost II)
Házíme férovou mincí, dokud nepadne orel, na každý hod dostaneme novou minci. (Jaká je pravděpodobnost, že získáme k mincí?) Pak všechny získané mince hodíme najednou, pokud na každé z mincí padne orel, můžeme si je všechny nechat. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane?

Řešení
$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr[k \text{ mincí}] \cdot \Pr[k\text{-krát orel}] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[(k-1)\text{-krát panna}] \cdot \Pr[k\text{-krát orel}] \cdot \Pr[k\text{-krát orel}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}$.

Nápověda k problému s obálkami: Vytáhneme minci a házíme, dokud nepadne panna. Označíme X celkový počet hodů (včetně posledního, tj. $X \geq 1$). Pokud v naší obálce je k stokorun, tak si obálku necháme, pokud $X < k$. Jaká je pravděpodobnost, že získáme obálku s vyšší částkou?